Klausur zur Höheren Mathematik I und II

für Fachrichtungen: kyb, phys, mech, etech, techpaed el

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 15 eigenhändig beschriebene DIN-A4-Blätter.
  Insbesondere sind Taschenrechner und Handys nicht erlaubt.
- **Alle Aufgaben** zählen.
- Bei den **Aufgaben 1 - 4** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht!
  Bei den **Aufgaben 5 - 8** sind nur die Ergebnisse verlangt. Tragen Sie diese in die dafür vorgesehenen Felder auf den Aufgabenblättern ein. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Wer mindestens 30 Punkte erreicht, besteht diese Prüfung.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 18. 10. 2010 über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **18. 10.** bis **22. 10. 2010** mit Frau Dr. Monika Schulz (Raum V 57.8.126) oder mit Dipl.-Math. Marco Bossle (Raum V 57.8.158) einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*12 Punkte*) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass 0 ein Eigenwert von A ist.

b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

c) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix T und eine Diagonalmatrix D , so dass

$$D = T^T AT.$$

d) Bestimmen Sie die affine Normalform der Quadrik mit der Gleichung

$$5x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 - 2x_1x_3 - 1 = 0.$$

Skizzieren Sie die Quadrik im Koordinatensystem der Normalform.

Aufgabe 2 (*6 Punkte*) Gegeben sei die reelle Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}} x^n.$$

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe ?

Aufgabe 3 (*10 Punkte*) Gegeben sei in Abhängigkeit von $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$, das Vektorfeld

$$g(x,y) = \left(\frac{\sqrt{y}}{k}(\sin x + x\cos x),\ \frac{k}{2\sqrt{y}} x \sin x + \ln y \right).$$

a) Bestimmen Sie für das Vektorfeld den maximalen Definitionsbereich D.
Für welche k handelt es sich um ein Gradientenfeld? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Berechnen Sie für $k = 1$ eine Potentialfunktion.

Aufgabe 4 (*12 Punkte*) Gegeben sei die reellweertige Funktion

$$f(x,y) = 2x^3 - 6x^2 + 3xy^2 - 3y^2 + 4.$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten $\operatorname{grad} f(x,y)$ und die Hessematrix $\mathrm{H}f(x,y)$ von f.

b) Berechnen Sie den Wert der Richtungsableitung von f in Richtung des Vektors $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^\mathsf{T}$ im Punkt $P = (1,1)$.

c) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema und alle Sattelpunkte von f.

Aufgabe 5 (*7 Punkte*) Gegeben sind die reellen linearen Gleichungssysteme $Ax = b_1$ und $Ax = b_2$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2t & 1 \\ 0 & 4 & t \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Tragen Sie in die untenstehende Tabelle ein, für welche t die Gleichungssysteme keine, genau eine bzw. unendlich viele Lösungen besitzen? Wenn es keine solche t gibt, tragen Sie bitte $\emptyset$ ein.

	keine Lösung	genau eine Lösung	unendlich viele Lösungen
$Ax = b_1$			
$Ax = b_2$			

b) Geben Sie alle reellen Lösungen des Gleichungssystems $Ax = b_2$ für $t = 0$ an.

Aufgabe 6 (*12 Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{2x^3 + 5x^2 + x + 4}{(x^2 - 1)(x^2 + 2)}$.

a) Kreuzen Sie den geeigneten Ansatz für die reelle Partialbruchzerlegung von f an:

$f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x^2-1} + \dfrac{c+dx}{x^2+2}$ ☐	$f(x) = \dfrac{a+bx}{x^2-1} + \dfrac{c+dx}{x^2+2}$ ☐
$f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c+dx}{x^2+2}$ ☐	$f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{x-2} + \dfrac{d}{x+2}$ ☐

b) Berechnen Sie die Koeffizienten: $a =$ ☐ , $b =$ ☐ ,c= ☐ , $d =$ ☐ .

c) Bestimmen Sie eine Stammfunktion F von der Funktion $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1} + \dfrac{2}{(1-x)^2} - \dfrac{1}{2x^2+1}$.

$F(x) =$

d) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $x^4 + 16 = 0$. Geben Sie die Lösungen sowohl in der Form $x = re^{i\varphi}$, $r \in \mathbb{R}, \varphi \in [0, 2\pi)$, als auch in der Form $x = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ an.

Aufgabe 7 (*6 Punkte*) Berechnen Sie, falls sie existieren, die folgenden Funktionsgrenzwerte und uneigentlichen Integrale. Tragen Sie andernfalls „divergent“ ein.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sinh(2x)} =$ ☐

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-2\cos(\frac{x}{4})}{1-\cos x} =$ ☐

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+x} =$ ☐

d) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x =$ ☐

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\cos^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}\,x =$ ☐

f) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\cos(\frac{\pi}{2x})}{x^2}\,\mathrm{d}\,x =$ ☐

Aufgabe 8 (*9 Punkte*) Gegeben ist die relle Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A. $\chi_A(\lambda) =$ ☐

b) Geben Sie die Eigenwerte der Matrix A mit den zugehörigen algebraischen Vielfachheiten an.

☐

c) Geben Sie die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte von A und die Jordan-Normalform von A in Abhängigkeit von t an.

Parameter t	Eigenwerte von A mit geometrischer Vielfachheit	Jordan-Normalform von A
