

Scheinklausur zur Numerischen Mathematik 1**Lösungen**

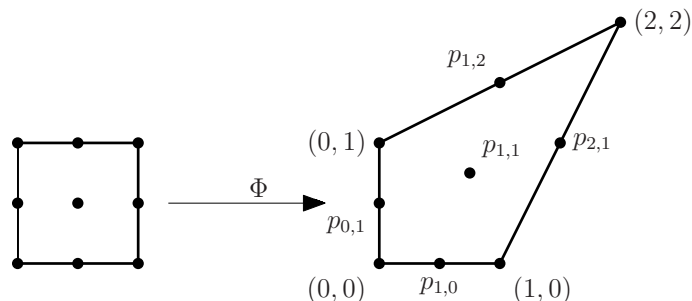
Aufgabe 1 Geben Sie (ohne Beweis) an, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind.

1. Der Romberg-Algorithmus integriert kubische Polynome exakt.
2. Für eine auf $[0, 1)$ gleichverteilte Folge strebt $(x_0 + \dots + x_{\ell-1})/\ell$ gegen $1/2$.
3. Die durch $x_0 = 0$, $x_{\ell+1} = 2^{-x_\ell}$ mit $\ell = 0, 1, \dots$ definierte Iteration konvergiert.
4. Jeder durch die Methode des steilsten Abstiegs erzeugte Häufungspunkt ist eine lokale Extremstelle.
5. Die Ableitung eines B-Splines ist ein B-Spline.

Lösung

1. Richtig. Die Trapezregel integriert lineare Polynome exakt; durch einen Romberg-Schritt beginnt der Fehlerterm dann mit der vierten Ableitung.
2. Richtig. Der Ausdruck kann als Monte Carlo Integration der Funktion $f(x) = x$ aufgefasst werden. Für eine gleichverteilte Zufallsfolge strebt der Ausdruck gegen den Integralwert $1/2$.
3. Richtig. Für $D = [0, \infty)$ sind die Bedingungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.
4. Falsch. Die Häufungspunkte sind nur kritische Punkte, müssen aber nicht extremal sein.
5. Falsch. Die Ableitung ist die Differenz zweier B-Splines mit unterschiedlichem Träger.

Aufgabe 2 Geben Sie die Gewichte der Tensorprodukt-Trapezregel mit $h = 1/2$ für das Einheitsquadrat $[0, 1]^2$ an und transformieren Sie Stützstellen und Gewichte bilinear auf den abgebildeten Drachen.



Geben Sie dazu insbesondere die zur Bestimmung der transformierten Stützstellen $p_{k,\ell} = (x_{k,\ell}, y_{k,\ell})$ und Gewichte $w_{k,\ell}$ verwendete bilineare Parametrisierung Φ und deren Jacobi-Matrix an.

Hinweis: Verwenden Sie, dass aufgrund der Symmetrie $x_{k,\ell} = y_{\ell,k}$ und $w_{k,\ell} = w_{\ell,k}$.

Lösung

Die Gewichte der Trapezregel sind $1/16$ an den Ecken, $1/8$ an den Kantenmitten und $1/4$ in der Mitte.

Die bilineare Parametrisierung hat die Form

$$\begin{aligned} \Phi : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(1-v) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1-u)v + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} uv \\ &= \begin{pmatrix} u + uv \\ v + uv \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit der Jacobi-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 1+v & u \\ v & 1+u \end{pmatrix}.$$

Einsetzen der Koordinaten der Stützstellen der Trapezregel ergibt

$$(x_{k,\ell}, y_{k,\ell}) : \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1/2) & (0,1) \\ (1/2,0) & (3/4,3/4) & (1,3/2) \\ (1,0) & (3/2,1) & (2,2) \end{pmatrix}.$$

Die Gewichte werden mit $\det J = 1 + u + v$ multipliziert:

$$w_{k,\ell} : \begin{pmatrix} 1/16 & 3/16 & 1/8 \\ 3/16 & 1/2 & 5/16 \\ 1/8 & 5/16 & 3/16 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 Bestimmen Sie die dividierten Differenzen und die Newton-Form des Interpolationspolynoms p für die Daten

$$\frac{x_i}{f(x_i)} \left\| \begin{array}{c|c|c} -1 & 0 & 1 \\ \hline -3 & 5 & 9 \end{array} \right\|.$$

Wie groß kann der Fehler $\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - p(x)|$ unter der zusätzlichen Voraussetzung $|f^{(3)}(x)| \leq 1$ höchstens sein?

Lösung Man berechnet das Dividierte-Differenzen-Schema

x	f	Δ_k^1	Δ_0^2
-1	-3		
		$8/1 = 8$	
0	5		$(4 - 8)/2 = -2$
		$4/1 = 4$	
1	9		

und liest aus der oberen Schrägzeile die Newton-Form ab:

$$p(x) = -3 + 8(x + 1) - 2(x + 1)x = -2x^2 + 6x + 5$$

Es ist

$$|f(x) - p(x)| = \underbrace{\left| \frac{f^{(3)}(t)}{3!} \right|}_{\leq 1/6} \underbrace{|(x + 1)x(x - 1)|}_{x^3 - x}.$$

Somit folgt

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{6} \max_{-1 \leq x \leq 1} |x^3 - x|$$

Man bestimmt für die punktsymmetrische Funktion $g(x) = x^3 - x$ die Extrema auf $[-1, 1]$. Aus $g'(x) = 3x^2 - 1 = 0$ erhält man $x = \pm 1/\sqrt{3}$ mit $g(1/\sqrt{3}) = -2/(3\sqrt{3})$ und $g(-1/\sqrt{3}) = 2/(3\sqrt{3})$. Somit ist $\max_{-1 \leq x \leq 1} |x^3 - x| = 2/(3\sqrt{3})$, und letztlich erhält man

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{9\sqrt{3}}.$$

Aufgabe 4 Bestimmen Sie die Fixpunkte der Abbildung

$$g(x) = \frac{3}{2+x}.$$

Für welche Intervalle $[\alpha, 2]$, $\alpha \geq 0$, sind die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt, und wie klein kann die Kontraktionskonstante c gewählt werden?

Lösung Für Fixpunkte gilt $x = \frac{3}{2+x}$ bzw. $x^2 + 2x = 3$, und man erhält $x_* \in \{1, -3\}$.

Wegen $g'(x) = \frac{-3}{(2+x)^2}$ gilt:

$$\begin{aligned} g'(1) &= \frac{-1}{3} \Rightarrow \text{anziehender Fixpunkt} \\ g'(-3) &= -3 \Rightarrow \text{abstoßender Fixpunkt} \end{aligned}$$

Die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind erfüllt, wenn g eine Kontraktion ist und wenn gilt:

$$g([\alpha, 2]) \subseteq [\alpha, 2] \Leftrightarrow g(\alpha) = \frac{3}{2+\alpha} \leq 2 \text{ und } g(2) = \frac{3}{4} \geq \alpha,$$

da g monoton fallend ist. Somit folgt $\alpha \leq 3/4$, da die erste Bedingung mit $\alpha \geq 0$ bereits erfüllt wird.

Kleinstes c (für Kontraktion): Da auch $|g'|$ für $\alpha \geq 0$ monoton fällt, ist

$$c = |g'(\alpha)| = \frac{3}{(2+\alpha)^2} \leq \frac{3}{4} < 1.$$

Somit erfüllen alle Intervalle $[\alpha, 2]$ mit $0 \leq \alpha \leq \frac{3}{4}$ die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes mit der Kontraktionskonstante $c = \frac{3}{(2+\alpha)^2}$.

Aufgabe 5 Führen Sie einen Schritt der Methode des steilsten Abstiegs für die Funktion

$$f(x, y) = y^2 - x^2 + x^4$$

mit Startpunkt $(x_0, y_0) = (1, 1)$ durch. Wird ein Minimum gefunden?

Lösung Der Gradient von f ,

$$\text{grad } f(x, y) = (-2x + 4x^3, 2y)^t,$$

im Punkt $(1, 1)$ ist $(2, 2)^t$. Also ist im ersten Schritt das Minimum von

$$f(x_0 - 2t, y_0 - 2t) = (1 - 2t)^2 - (1 - 2t)^2 + (1 - 2t)^4 = (1 - 2t)^4$$

zu bestimmen. Man erhält $t = 1/2$ und $(x_1, y_1) = (0, 0)$. Da der Gradient verschwindet bricht das Verfahren ab.

Da die Hesse-Matrix

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte mit unterschiedlichen Vorzeichen hat ist $(0, 0)$ ein Sattelpunkt, es wird also kein Minimum erreicht.

Aufgabe 6

Schreiben Sie ein MATLAB-Programm `[c,s] = exp_fit(t,p,c,s)`, das das nichtlineare Ausgleichsproblem

$$\|f\|_2 \rightarrow \min, \quad f_j = p_j - \sum_{k=1}^n c_k \exp(s_k t_j), \quad j = 1, \dots, m > n,$$

mit dem Gauß-Newton-Verfahren löst. Gehen Sie dabei davon aus, dass die Konvergenz für die übergebenen Startwerte gesichert ist, und stoppen Sie die Iteration, wenn sich die Komponenten von c und s um weniger als 10^{-6} ändern.

Hinweis:

Bestimmen Sie zunächst die $m \times (2n)$ -Jacobi-Matrix $[\partial f / \partial c, \partial f / \partial s]$.

Lösung

```
function [c,s] = exp_fit(t,p,c,s)

delta = inf;
while delta >= 1.0e-6
    E = exp(t*s');
    f = p - E*c;
    df = [-E, -(t*c') .* E];
    dcs = df \ f;
    c = c - dcs(1:end/2);
    s = s - dcs(end/2+1:end);
    delta = norm(dcs,inf);
end
```