Prof. Dr. Klaus Höllig 18. März 2011

Modulprüfung Numerische Mathematik 1

Zugelassene Hilfsmittel: 5 eigenhändig beschriebene Blätter DIN A4
Bearbeitungszeit: 120 min.

Zu bearbeiten sind fünf der sechs Aufgaben. Bitte geben Sie nur Lösungen zu fünf Aufgaben ab. Werden zu allen sechs Aufgaben Lösungen abgegeben, wird die Lösung zur Aufgabe 6 nicht gewertet.

Alle wesentlichen Zwischenschritte sind stichwortartig anzugeben, die Angabe eines Ergebnisses allein genügt nur bei Aufgabe eins.

Beschreiben Sie alle Blätter nur einseitig und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt !

Wichtige Hinweise für Wiederholer: Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass bei einigen Fachrichtungen zur Wiederholungsprüfung eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt ein mindestens ausreichendes Ergebnis.

Informieren Sie sich bis spätestens 29. 04. 2011 über Ihr Prüfungsergebnis, das voraussichtlich ab 18. 04. 2011 bekannt gegeben wird, und vereinbaren Sie gegebenenfalls umgehend im Sekretariat 8.162 einen Termin für die mündliche Nachprüfung. Sie erhalten keine schriftliche Benachrichtigung. Mit der Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtung an.

Aufgabe 1 Geben Sie (ohne Beweis) an, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind.

1. Die Trapezregel integriert Parabeln exakt.
2. Für eine glatte konvexe Funktion f mit $\min\limits_x f(x) \leq 0$ konvergiert das Newton-Verfahren für jeden Startwert x_0 mit $f'(x_0) \neq 0$.
3. Die diskrete Fourier-Transformation eines reellen Vektors ist reell.
4. Alle dividierten Differenzen von $\exp(x)$ sind positiv.
5. Die Methode der konjugierten Gradienten ist ein lineares Iterationsverfahren.

Aufgabe 2 Bestimmen Sie die Fixpunkte der Abbildung

$$x \mapsto g(x) = 3\sqrt{x} - 2\,.$$

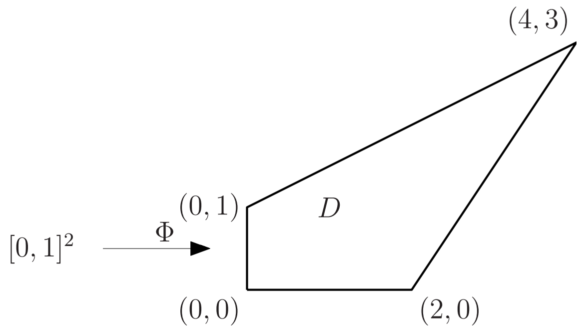
Verifizieren Sie für eines der Intervalle

$$(0,2)\,, [3,5] \quad \text{oder} \quad [1,4]$$

die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes.

Hinweis: $\sqrt{2} \approx 1.41$, $\sqrt{3} \approx 1.73$, $\sqrt{5} \approx 2.24$.

Aufgabe 3 Geben Sie eine bilineare Parametrisierung Φ des abgebildeten Vierecks und deren Jacobi-Matrix an.



Bestimmen Sie das Gewicht w und die Stützstelle (x_1, x_2) der transformierten Mittelpunktsregel $\iint\limits_D f\, dx \approx w f(x_1, x_2)$.

Aufgabe 4 Approximieren Sie die positive Nullstelle der Funktion $f(x) = x - \cos(\pi x)$ mit Hilfe der Newton-Form des quadratischen Interpolationspolynoms p an den Stützstellen $x = -1/2, 0, 1/2$. Geben Sie eine Schranke für das Maximum des Fehlers $|f - p|$ auf $[-1/2, 1/2]$ an.

Hinweis: Die lokalen Extrema von $|x|\,|x^2 - a^2|$ haben den Wert $(2/9)\sqrt{3}\,|a|^3$.

Aufgabe 5 Bestimmen Sie für die quadratische Funktion

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x,y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und den Startwert $(x_0, y_0) = (0, 0)$ jeweils die ersten beiden Suchrichtungen für die Methode des steilsten Abstiegs und die Methode der konjugierten Gradienten.

Hinweise: Richtungen sind nur bis auf skalare Vielfache zu bestimmen; die Normierung (insbesondere auch das Vorzeichen) ist irrelevant. Benutzen Sie die Eigenschaften der Gradienten und konjugierten Suchrichtungen bei der Methode der konjugierten Gradienten.

Aufgabe 6 Schreiben Sie ein MATLAB-Programm `x = intersection(A,B,x)`, das einen Schnittpunkt der durch

$$x^t A x - 1 = 0, \quad x^t B x - 1 = 0$$

gegebenen zwei Kegelschnitte bestimmt. (A und B sind symmetrische 2×2-Matrizen.) Verwenden Sie das Newton-Verfahren, gehen Sie davon aus, dass die Konvergenz für die übergebene Startnäherung $(x_1, x_2)^{\mathrm{t}}$ gesichert ist, und stoppen Sie die Iteration, wenn sich die Komponenten von x um weniger als 10^{-6} ändern.