

## Lösungsvorschläge zur Klausur für bau, ernen, fmt, IuI, mach, tema, umw, verf

### Aufgabe 1: (10 Punkte)

Es sei

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, -(x^2 + y^2) \leq z \leq xy + 1\}$$

gegeben.

- (a) Zeigen Sie:  $M$  ist bezüglich der  $(x, y)$ -Ebene ein Normalbereich.  
 (b) Bestimmen Sie für das stetig differenzierbare Vektorfeld  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$f(x, y, z) := \left(1, 0, zx\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

den Ausfluss von  $f$  durch die Oberfläche von  $M$ .

### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

Wir setzen im Folgenden zur Vereinfachung  $k(x, y) := -(x^2 + y^2)$  und  $\ell(x, y) := xy + 1$  sowie  $D_1(0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

- (a) Da  $\ell, k$  auf  $D_1(0)$  stetig sind und  $D_1(0)$  als Kreisfläche selbst ein Normalbereich bezüglich der  $x$  respektive  $y$ -Achse darstellt, ist nur noch zu verifizieren, dass  $k(x, y) \leq \ell(x, y)$  für alle  $(x, y) \in D_1(0)$  gilt.

Wir führen Zylinderkoordinaten ein:  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$  mit  $r \in [0, 1], \varphi \in [0, 2\pi]$ .  
Damit erhalten wir

$$l(x, y) = r^2 \cos \varphi \sin \varphi + 1 \geq 1 - \underbrace{|r^2| \cdot |\cos \varphi \sin \varphi|}_{\leq 1} \geq 0 \geq -r^2 = k(x, y).$$

Folglich ist  $M$  ein Normalgebiet bezüglich der  $(x, y)$ -Ebene.

### (b) 1. Variante (mit dem Satz von Gauß)

Aus dem Satz von Gauß wissen wir

$$A(f, \partial M) = \iiint_M \operatorname{div} f(x, y, z) \, dx dy dz,$$

wobei wir die Randfläche von  $M$  mit  $\partial M$  bezeichnen.

Für die Divergenz in kartesischen Koordinaten erhalten wir

$$\operatorname{div} f(x, y, z) = x \cdot \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \iiint_M \operatorname{div} f(x, y, z) \, dx dy dz &= \iint_{D_1(0)} \int_{k(x,y)}^{\ell(x,y)} x \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \, dz dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{z=k(r \cos \varphi, r \sin \varphi)}^{\ell(r \cos \varphi, r \sin \varphi)} r^2 \cos \varphi \cdot \underbrace{|\det J_\Phi|}_r \, dz dr d\varphi. \end{aligned}$$

wobei wir  $M$  in der zweiten Zeile auf Zylinderkoordinaten transformiert haben. Daraus erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{z=-r^2}^{r^2 \cos \varphi \sin \varphi + 1} r^3 \cos \varphi \, dz dr d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \cos \varphi (r^2 \cos \varphi \sin \varphi + 1 + r^2) \, dr d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^5 + r^3) \cos \varphi \, dr d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^5 \cos^2 \varphi \sin \varphi \, dr d\varphi \\ &= \left[ \frac{1}{6} r^6 + \frac{1}{4} r^4 \right]_0^1 \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi}_{=0} + \left[ \frac{1}{6} r^6 \right]_0^1 \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \\ &= -\frac{1}{18} \cdot [\cos^3 \varphi]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Somit ist  $A(f, \partial M) = 0$ .

## 2. Variante (per Definition)

Der Ausfluss von  $f$  durch die Oberfläche  $\partial M$  ist durch

$$A(f, \partial M) = \iint_{\partial M} f \cdot n \, dO$$

definiert, wobei wir mit  $n$  den auf  $\partial M$  nach außen gerichtete Normaleneinheitsvektor bezeichnen. Die Oberfläche von  $\partial M$  lässt sich nicht komplett stetig differenzierbar parametrisieren. Da  $M$  ein durch den Graphen von  $\ell$  nach oben und durch den Graphen von  $k$  nach unten begrenzter Kreiszyylinder ist, können wir  $\partial M$  jedoch in drei Flächen (Mantel  $\partial M_M$ , Boden  $\partial M_k$ , Deckel  $\partial M_\ell$ ) aufteilen, welche man jeweils stetig differenzierbar parametrisieren kann. Es ist dann

$$\iint_{\partial M} f \cdot n \, dO = \underbrace{\iint_{\partial M_M} f \cdot n \, dO}_{=\text{Mantel}} + \underbrace{\iint_{\partial M_\ell} f \cdot n \, dO}_{=\text{Deckel}} + \underbrace{\iint_{\partial M_k} f \cdot n \, dO}_{=\text{Boden}}.$$

**Mantel:** Die durch  $\Phi^M : \{(\varphi, z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -1 \leq z \leq \cos \varphi \sin \varphi + 1\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\Phi^M(\varphi, z) = (\cos \varphi, \sin \varphi, z)^\top$  definierte Abbildung parametrisiert stetig differenzierbar die Mantelfläche des Zylinders. Es ist

$$\Phi_\varphi^M(\varphi, z) = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)^\top, \quad \Phi_z^M(\varphi, z) = (0, 0, 1)^\top$$

woraus sich

$$\left(\Phi_\varphi^M \times \Phi_z^M\right)(\varphi, z) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)^\top$$

und

$$f(\Phi^M(\varphi, z)) = (1, 0, z \cdot \cos \varphi)^\top$$

ergibt. Somit ist

$$\begin{aligned} \iint_{\partial M_M} f \cdot n dO &= \int_0^{2\pi} \int_{z=-1}^{\cos \varphi \sin \varphi + 1} \cos \varphi dz d\varphi = \int_0^{2\pi} (\cos^2 \varphi \sin \varphi + 2 \cos \varphi) d\varphi \\ &= \left[ -\frac{1}{3} \cos^3 \varphi + 2 \sin \varphi \right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

**Deckel:** Die durch  $\Phi^\ell : [0, 1] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$\Phi^\ell(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, r^2 \cos \varphi \sin \varphi + 1)^\top$$

definierte Abbildung parametrisiert den Deckel des Zylinders. Es ist

$$\begin{aligned} \Phi_r^\ell(r, \varphi) &= (\cos \varphi, \sin \varphi, 2r \cos \varphi \sin \varphi)^\top, \\ \Phi_\varphi^\ell(r, \varphi) &= (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, r^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi))^\top, \end{aligned}$$

woraus sich

$$\left(\Phi_r^\ell \times \Phi_\varphi^\ell\right)(r, \varphi) = (-r^2 \sin \varphi, -r^2 \cos \varphi, r)^\top$$

und

$$f(\Phi^\ell(r, \varphi)) = (1, 0, r^4 \cos^2 \varphi \sin \varphi + r^2 \cos \varphi)^\top$$

ergibt. Damit ist

$$\begin{aligned} \iint_{\partial M_\ell} f \cdot n dO &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-r^2 \sin \varphi + r^5 \cos^2 \varphi \sin \varphi + r^3 \cos \varphi) dr d\varphi \\ &= \left[ -\frac{1}{3} r^3 \right]_0^1 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi}_{=0} + \left[ \frac{1}{6} r^6 \right]_0^1 \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi + \left[ \frac{1}{4} r^4 \right]_0^1 \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi}_{=0} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left[ -\frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Zum Schluss berechnen wir noch das Oberflächenintegral bezüglich des Bodens.

**Boden:** Die durch  $\Phi^k : [0, 1] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\Phi^k(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, -r^2)^\top$  definierte Abbildung parametrisiert den Boden des Zylinders. Es ist

$$\Phi_r^k(r, \varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, -2r)^\top, \quad \Phi_\varphi^k(r, \varphi) = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0)^\top$$

woraus sich

$$\left(\Phi_r^k \times \Phi_\varphi^k\right)(r, \varphi) = (2r^2 \cos \varphi, 2r^2 \sin \varphi, r)^\top$$

und

$$f(\Phi^k(r, \varphi)) = (1, 0, -r^4 \cos \varphi)^\top$$

ergibt. Damit der Normalenvektor nach außen zeigt, muss er noch mit  $-1$  multipliziert werden. Somit ist

$$\begin{aligned} \iint_{\partial M_k} f \cdot n dO &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^5 \cos \varphi - 2r^2 \cos \varphi) dr d\varphi \\ &= \left[ \frac{1}{6} r^6 - \frac{2}{3} r^3 \right]_0^1 \cdot \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\iint_{\partial M_M} f \cdot n dO = \iint_{\partial M_\ell} f \cdot n dO = \iint_{\partial M_k} f \cdot n dO = 0$$

und damit insgesamt  $A(f, \partial M) = 0$ .

**Aufgabe 2:** (7 Punkte)

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$(2x^2 - x)y' + y = 2x, \quad x > \frac{1}{2},$$

sowie die spezielle Lösung zum Anfangswert  $y(1) = 2$ .

**Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:**

Umformen ergibt

$$y' + \frac{1}{x(2x-1)}y = \frac{2x}{x(2x-1)}.$$

Diese Gleichung hat die Form

$$y' + g(x)y = h(x)$$

mit

$$g(x) = \frac{1}{x(2x-1)}, \quad h(x) = \frac{2}{2x-1}.$$

Nach Satz 3.2.8 berechnen wir unter Verwendung einer Partialbruchzerlegung

$$G(x) = \int g(x) dx = \int \left( \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x} \right) dx = \ln(2x-1) - \ln(x),$$

$$e^{-G(x)} = e^{\ln(x) - \ln(2x-1)} = \frac{x}{2x-1}$$

und erhalten damit die homogene Lösung

$$f_h(x) = C \frac{x}{2x-1}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Für die partikuläre Lösung verwenden wir den Ansatz der Variation der Konstanten:

$$f_p(x) = k(x) \frac{x}{2x-1}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$k(x) = \int h(x) e^{G(x)} dx$$

$$= \int \frac{2}{2x-1} e^{\ln(2x-1) - \ln(x)} dx$$

$$= \int \frac{2}{2x-1} \frac{2x-1}{x} dx = \int \frac{2}{x} dx = 2 \ln x.$$

Damit ist die gesamte Lösung

$$f(x) = (C + k(x)) e^{-G(x)} = (C + 2 \ln x) \frac{x}{2x-1}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Aus der Anfangsbedingung  $y(1) = 2$  folgt durch Einsetzen  $C = 2$  und damit die spezielle Lösung

$$y(x) = (2 + 2 \ln x) \frac{x}{2x-1}.$$

**Aufgabe 3:** (8 Punkte)

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' - y' - 2y = 4(\sinh(x))^2 + 2.$$

**Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:**Zuerst muss die homogene Lösung bestimmt werden. Aus  $y'' - y' - 2y = 0$  ergibt sich das charakteristische Polynom

$$p(X) = X^2 - X - 2 = (X - 2)(X + 1)$$

mit den Nullstellen  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = -1$ . Die homogene Lösung lautet daher

$$f_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Um die inhomogene Lösung zu bestimmen, bietet es sich an, die rechte Seite umzuformen:

$$h(x) = 4(\sinh(x))^2 + 2 = 4 \left( \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \right)^2 + 2 = e^{2x} + e^{-2x}.$$

Nun gibt es mehrere Möglichkeiten:

- **Ansatz nach Art der rechten Seite**

Hier wird das Superpositionsprinzip angewendet, d.h. es werden partikuläre Lösungen zu den beiden Störfunktionen  $h_1(x) = e^{2x}$  und  $h_2(x) = e^{-2x}$  gesucht. Dazu wird der Ansatz nach Art der rechten Seite genutzt.

1. Störfunktion  $h_1$ :

Zunächst wird die Störfunktion  $h_1(x) = e^{2x}$  betrachtet. Da das charakteristische Polynom die einfache Nullstelle 2 hat (Resonanz) und der polynomiale Faktor der Störfunktion vom Grad 0 ist, besitzt der Ansatz für die partikuläre Lösung die Form

$$f_{p1}(x) = axe^{2x}$$

mit den Ableitungen

$$f'_{p1}(x) = a(1 + 2x)e^{2x} \quad \text{und} \quad f''_{p1}(x) = a(4 + 4x)e^{2x}.$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$a(4 + 4x)e^{2x} - a(1 + 2x)e^{2x} - 2axe^{2x} = 3ae^{2x} \stackrel{!}{=} e^{2x} = h_1(x),$$

was auf  $a = \frac{1}{3}$  führt. Alternativ kann der Operatorenkalkül verwendet werden:

$$(D + 1)(D - 2)axe^{2x} \stackrel{!}{=} e^{2x}$$

$$e^{2x}(D + 3)D(ax) \stackrel{!}{=} e^{2x}$$

$$(D + 3)a \stackrel{!}{=} 1$$

$$3a \stackrel{!}{=} 1,$$

was ebenfalls  $a = \frac{1}{3}$  liefert. Damit lautet die partikuläre Lösung

$$f_{p1} = \frac{1}{3}xe^{2x}.$$

2. Störfunktion  $h_2$ :

Die zweite Störfunktion lautet  $h_2(x) = e^{-2x}$ . Da  $-2$  keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist und der polynomiale Faktor der Störfunktion Grad 0 hat, besitzt der Ansatz für die partikuläre Lösung die Form

$$f_{p2}(x) = ae^{-2x}$$

mit den Ableitungen

$$f'_{p2}(x) = -2ae^{-2x} \quad \text{und} \quad f''_{p2}(x) = 4ae^{-2x}.$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$4ae^{-2x} + 2ae^{-2x} - 2ae^{-2x} = 4ae^{-2x} \stackrel{!}{=} e^{-2x} = h_2(x),$$

was auf  $a = \frac{1}{4}$  führt. Damit lautet die partikuläre Lösung

$$f_{p2} = \frac{1}{4}e^{-2x}.$$

#### • Variation der Konstanten

Der Ansatz  $f_p(x) = c_1(x)e^{2x} + c_2(x)e^{-x}$  führt auf

$$\begin{pmatrix} e^{2x} & e^{-x} \\ 2e^{2x} & -e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1(x) \\ c'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2x} + e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

Umformen liefert

$$\begin{pmatrix} 3e^{2x} & 0 \\ 0 & -3e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1(x) \\ c'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} + e^{-2x} \\ e^{2x} + e^{-2x} \end{pmatrix}$$

und damit

$$c'_1(x) = \frac{1}{3}(1 + e^{-4x}), \quad c'_2(x) = -\frac{1}{3}(e^{3x} + e^{-x}).$$

Integration ergibt

$$c_1(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{12}e^{-4x}, \quad c_2(x) = -\frac{1}{9}e^{3x} + \frac{1}{3}e^{-x}$$

und damit die partikuläre Lösung

$$f_p(x) = \frac{1}{3}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{-2x} - \frac{1}{9}e^{2x}.$$

Insgesamt erhält man die allgemeine Lösung

$$f(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + \frac{1}{3}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{-2x} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

**Aufgabe 4:** (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:**

- **1. Variante (mit Minimalpolynom)** (siehe Satz 6.3.7)

Wir erhalten

$$v = y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Av = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A^2v = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

und damit  $A^2v + 4v = 0$ . Das zugehörige Polynom

$$p(X) = X^2 + 4$$

hat die Nullstellen  $\lambda_{1/2} = \pm 2i$ , und damit lautet das reelle Fundamentalsystem der zugehörigen skalaren Differentialgleichung

$$g_1(x) = \cos(2x), \quad g_2(x) = \sin(2x).$$

Die zugehörige Wronski-Matrix ist

$$M(x) = \begin{pmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -2\sin(2x) & 2\cos(2x) \end{pmatrix}$$

mit

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (M(0)^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ -2\sin(2x) \\ \cos(2x) + 2\sin(2x) \end{pmatrix}.$$

- **2. Variante (mit charakteristischem Polynom)** (siehe Satz 6.3.4)

Wie oben erhalten wir

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Av = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A^2v = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom der Matrix  $A$  lautet

$$\chi_A(X) = (2 - X)((1 - X)(-1 - X) + 5) = (2 - X)(X^2 + 4)$$

mit den Nullstellen  $\lambda_{1/2} = \pm 2i$ ,  $\lambda_3 = 2$ . Das reelle Fundamentalsystem der zugehörigen skalaren Differentialgleichung lautet damit

$$g_1(x) = \cos(2x), \quad g_2(x) = \sin(2x), \quad g_3(x) = e^{2x}.$$

Die zugehörige Wronski-Matrix ist

$$M(x) = \begin{pmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) & e^{2x} \\ -2\sin(2x) & 2\cos(2x) & 2e^{2x} \\ -4\cos(2x) & -4\sin(2x) & 4e^{2x} \end{pmatrix},$$

mit

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad (M(0)^T)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ \sin(2x) \\ e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ -2\sin(2x) \\ \cos(2x) + 2\sin(2x) \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 5:** (9 Punkte)

Gegeben ist die 2-periodische Funktion  $f$  mit

$$f(x) = x + \sin(\pi x) \quad \text{für} \quad -1 \leq x < 1 \quad \text{und} \quad f(x+2) = f(x).$$

- (a) Entwickeln Sie  $f$  in eine reelle Fourier-Reihe.  
 (b) Bestimmen Sie für alle  $x \in \mathbb{R}$  den Grenzwert der Fourier-Reihe.

**Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:**

- (a) Da  $f(-x) = -f(x)$  gilt, ist die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung. Damit ist  $a_0 = a_n = 0$  für alle  $n$ .

Um die anderen Koeffizienten zu berechnen, bietet es sich an, die Summanden  $x$  und  $\sin(\pi x)$  getrennt zu betrachten. Für den ersten Teil erhalten wir

$$\begin{aligned} \hat{b}_n &= \int_{-1}^1 x \sin(n\pi x) dx = 2 \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx \\ &= \left[ -\frac{2}{n\pi} x \cos(n\pi x) \right]_0^1 + \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \cos(n\pi x) dx \\ &= -\frac{2}{n\pi} \cos(n\pi) + \frac{2}{n^2\pi^2} [\sin(n\pi x)]_0^1 = (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi}. \end{aligned}$$

Der zweite Summand  $\sin(\pi x)$  ist schon in Form einer Fourierreihe gegeben.

Damit erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sin(\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi} \sin(n\pi x) \\ &= \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) \sin(\pi x) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi} \sin(n\pi x) \end{aligned}$$

- (b) Die Funktion  $f$  ist nur an den Punkten  $\{2k+1 : k \in \mathbb{Z}\}$  unstetig. An allen anderen Punkten konvergiert die Fourierreihe folglich gegen den Funktionswert, während sie an den Sprungstellen gegen den Mittelwert  $\frac{1}{2}(1 + (-1)) = 0$  konvergiert. Der Grenzwert der Fourierreihe ist also die 2-periodische Fortsetzung der Funktion

$$\begin{cases} x + \sin(x), & \text{für } -1 < x < 1, \\ 0, & \text{für } x = -1. \end{cases}$$