Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 240 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 10** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 11 – 15** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\, x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\, b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 26. 04. 2011 über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **26. 04.** bis **29. 04. 2011** mit Frau Marina Borgart (täglich 10 Uhr - 12 Uhr, Raum V 57.7.554) einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*5 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y)^{\mathsf{T}} \mapsto (x^2+1)^y.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Stufe zum Entwicklungspunkt $(1,1)$.

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie die folgenden Ableitungen:

(a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}\right)$ **(b)** $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\ln\left(\dfrac{e^x}{x^2+1}\right)\right)$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Gegeben sei das Vektorfeld

$$f \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^{\mathsf{T}}\} \to \mathbb{R}^2 \colon (x,y)^{\mathsf{T}} \mapsto \frac{-1}{(x^2+y^2)^{3/2}}(x,y)^{\mathsf{T}}.$$

(a) Berechnen Sie ein Potential von f.

(b) Gegeben seien nun die Punkte $P_1 = (-1,0)^{\mathsf{T}}$ und $P_2 = (1,0)^{\mathsf{T}}$. Geben Sie eine Parametrisierung für eine Kurve K an, welche die Punkte P_1 (Startpunkt) und P_2 (Endpunkt) über einen Halbkreis um den Nullpunkt mit Radius 1 verbindet.

(c) Berechnen Sie das Kurvenintegral von f längs K.

Aufgabe 4 (*10 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int e^{\cos x}\sin x\cos x\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{\cos x}\sin x\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,\mathrm{d}\,x$

(d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,\mathrm{d}\,x$

(e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe 5 (*8 Punkte*) Ein rechteckiger Karton ohne Deckel soll aus $12\mathrm{m}^2$ Pappe hergestellt werden. Berechnen Sie das maximale Volumen eines solchen Kartons.

(a) Geben Sie einen Ausdruck V für das Volumen des Kartons in Abhängigkeit von Länge und Breite an.

(b) Bestimmen Sie Lage und Typ aller kritischen Stellen von V. Was ist das maximale Volumen des Kartons?

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren.

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k+1}$ **(b)** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$ **(c)** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(3+(-1)^k)^k}$

Aufgabe 7 (*5 Punkte*) Es sei eine Ebene E_2 im $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$E_2 : 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 5 = 0$$

(a) Bestimmen Sie die Ebenen E_1 und E_3 parallel zu E_2, welche von E_2 jeweils den Abstand 3 haben.

Wir betrachten eine Gerade g durch den Ursprung, welche E_1 im Punkt A schneidet, E_2 im Punkt B und E_3 im Punkt C. Dabei betragen die Abstände $|AB|$ und $|BC|$ jeweils 6.

(b) Machen Sie eine Skizze des geometrischen Sachverhalts.

(c) Berechnen Sie, unter welchem Winkel die Gerade g die Ebenen E_1, E_2 und E_3 schneidet. Ermitteln Sie dabei den Winkel zur jeweiligen Normalen der Ebene.

Aufgabe 8 (*8 Punkte*)
Gegeben ist das reelle, lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \alpha \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A.

(b) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besitzt das System eine eindeutige Lösung? Berechnen Sie diese Lösung.

(c) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besitzt das System unendlich viele Lösungen? Berechnen Sie die Lösungsmenge.

(d) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besitzt das System keine Lösungen?

Aufgabe 9 (*5 Punkte*) Bestimmen Sie die Eigenwerte sowie die zugehörigen Eigenräume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die algebraische und geometrische Vielfachheit aller Eigenwerte an.

Aufgabe 10 (*4 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung

$$z(2-i) = 1 + 3i$$

in der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Formel

$$(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) \right)$$

mit Hilfe vollständiger Induktion.

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 11 (*3 Punkte*) Geben Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt an und bestimmen Sie den Konvergenzradius.

	Entwicklungspunkt	Konvergenzradius
$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n z^{2n}$		
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n^2+1}(z-3i)^n$		

Aufgabe 12 (*3 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right) =$

(c) $\lim_{n\to +\infty} \left(\frac{(-1)^n n}{2n^2+1} - 2\right) =$

(b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x+\cos(x)}{x} =$

Aufgabe 13 (*5 Punkte*) Gegeben sei die Quadrik

$$Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -x_1^2 - x_3^2 - 2\sqrt{2}x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2\sqrt{2}x_2x_3 + 1 = 0 \right\} .$$

Geben Sie die Matrixbeschreibung der Quadrik an.

Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik.

Bestimmen Sie die Gestalt der Quadrik anhand der Normalform.

Aufgabe 14 (*8 Punkte*) Wir betrachten für $\mathbb{R}^3$ die beiden Basen

$$\mathcal{E}_3\colon \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{C}\colon \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

und für $\mathbb{R}^2$ die Basen

$$\mathcal{B}_1\colon \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{B}_2\colon \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}.$$

Die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch die Matrix

$$_{\mathcal{E}_3}f_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Basiswechselmatrizen

$$_{\mathcal{C}}\mathrm{id}_{\mathcal{E}_3} = \boxed{} \quad \text{und} \quad _{\mathcal{B}_1}\mathrm{id}_{\mathcal{B}_2} = \boxed{}$$

sowie die Abbildungsmatrix in neuen Basen

$$_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}_2} = \boxed{}.$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 15 (*3 Punkte*) Gegeben ist das Vektorfeld

$$f_\alpha \colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \colon \quad (x, y, z)^\mathsf{T} \mapsto \left(\alpha \frac{z}{x}, \frac{z}{y}, \ln(xy)\right)^\mathsf{T}$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist. Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von f_α:

$$\mathrm{J}f_\alpha\left((x, y, z)^\mathsf{T}\right) = \boxed{} \,.$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das Vektorfeld ein Potential: $\alpha = \boxed{}$?