# Klausur der Modulprüfung / Diplomvorprüfung

für **Dipl. aer**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- Bearbeitungszeit: 120 Minuten
- Erlaubte Hilfsmittel: **10 Seiten DIN A4 eigenhändig beschrieben.**
- Bearbeitungen mit Bleistift, Grün- oder Rotstift sind nicht zulässig!
- Lesen Sie zunächst die Aufgabenstellungen aufmerksam durch und beachten Sie, dass je nach Lösungsweg die gegebenen Hinweise hilfreich sein können.
- In den **Aufgaben 3 – 5** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung der Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen und die Matrikelnummer.
- In den **Aufgaben 1 – 2** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 04.05.2011 über das Studenteninformationssystem der Universität Stuttgart (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekannt gegeben.
- Die Klausureinsicht wird voraussichtlich am 06.05.2011 stattfinden, Ort und Uhrzeit werden auf `www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM3-Kuehnel-WS1011/` bekannt gegeben.

VIEL ERFOLG!

**Hinweise für Wiederholer:**

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich **persönlich** vom 11.05.2011 bis zum 13.5.2011 bei Marcel Bliem (V57 8.155, `bliem@mathematik.uni-stuttgart.de`) einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Die mündlichen Nachprüfungen finden vom **24.05.2011 bis 26.05.2011** statt.

| Name, Vorname | Matrikelnummer | Studiengang |
|---|---|---|
| | | |

**Aufgabe 1** ($6 + 4 = 10$ *Punkte*)

**(a)** Bestimmen Sie die Lösung des reellen Anfangswertproblems

$$y' = 2y^2 \frac{\tan(x)}{\cos^2(x)}, \qquad y(0) = -1, \qquad x \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})$$

$$\int \frac{\tan(x)}{\cos^2(x)}\, dx = \boxed{\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{\cos^2(x)}}$$

$$y(x) = \boxed{-\cos^2(x)}$$

**(b)** Lösen Sie das komplexe Anfangswertproblem

$$y'' + 2\mathrm{i}y' - y = 0, \qquad y(0) = y'(0) = 1.$$

Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\lambda_1 = \boxed{-\mathrm{i}} \qquad \lambda_2 = \boxed{-\mathrm{i}}$$

Lösung

$$y(x) = \boxed{e^{-\mathrm{i}x} + (1+\mathrm{i})xe^{-\mathrm{i}x}}$$

**Aufgabe 2** (4 *Punkte*)

Die Fourier-Transformierte $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\mathrm{i}\omega x}$ von $f(x) = e^{-|x|}$ ist gegeben durch

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}.$$

Bestimmen Sie die Fouriertransformierte zu $g(x) = (x-a)f(x-a)$ mit $a \in \mathbb{R}$.

$$\hat{g}(\omega) = \boxed{-4\mathrm{i}\tfrac{\omega e^{-\mathrm{i}a\omega}}{(1+\omega^2)^2}}$$

**Aufgabe 3** $(3+3+3+3+3=15$ *Punkte*$)$

Gegeben seien der Zylinder $Z$ und die Kugeloberfläche $K$ mit

$$Z = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2 \le 1,\ z \ge 0\right\} \quad \text{und} \quad K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 = 4\right\}.$$

Betrachtet wird das Flächenstück $M = Z \cap K$ und das Vektorfeld $\vec{X} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$\vec{X}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}z^2(1+y^2) \\ xyz^2 + \frac{1}{2}x^2 \\ xy^2z + xz \end{pmatrix}.$$

Eine Parametrisierung $\Phi$ von $K$ ist

$$\Phi(\varphi,\vartheta) = (2\cos\varphi\sin\vartheta, 2\sin\varphi\sin\vartheta, 2\cos\vartheta), \quad 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \vartheta \le \pi.$$

**(a)** Skizzieren Sie $M$ als Teilfläche von $K$ und berechnen Sie die Länge der Randkurve $\partial M$.

**(b)** Bestimmen Sie eine Teilmenge $D \subset [0,2\pi) \times [0,\pi]$, so dass $\Phi(D) = M$.

**(c)** Bestimmen Sie eine Normale $\vec{n}(\varphi,\vartheta)$ an $M$ mit positiver dritter Koordinate.

**(d)** Berechnen Sie $\operatorname{rot}\vec{X}$.

**(e)** Berechnen Sie

$$\int_{\partial M} \vec{X} \cdot d\vec{x}$$

mit Hilfe des Satzes von Stokes, wobei $\partial M$ bezüglich $\vec{n}$ positiv umlaufen wird.

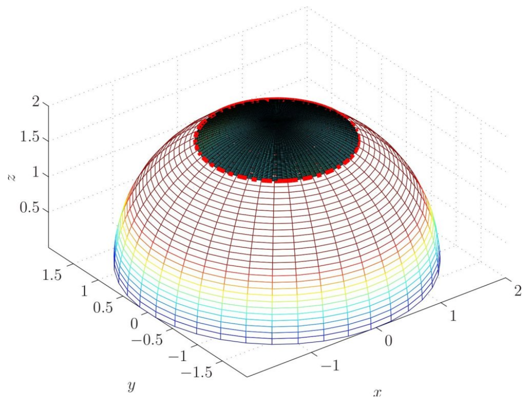
*Hinweis:*

| $x$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ |
|---|---|---|---|
| $\cos(x)$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

| $x$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ |
|---|---|---|---|
| $\sin(x)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |

---

**(a)** $M$ ist die "nördliche" Polkappe. $\partial M$ ist ein Kreis mit Radius 1, d.h. $\partial M$ hat die Länge $2\pi$. Skizze:



**(b)** Der Zylinder vom Radius 1 schneidet die Kugeloberfläche vom Radius 2 bei

$$z^2 + 1 = 4 \qquad \Rightarrow \qquad z = \sqrt{3}$$

Damit gilt

$$\sqrt{3} \overset{!}{=} 2\cos\vartheta \qquad \Rightarrow \qquad \vartheta = \frac{\pi}{6}$$

Der Parameterbereich ergibt sich zu

$$D = [0, 2\pi) \times [0, \tfrac{\pi}{6}]$$

**(c)** $M$ ist Teilfläche der Kugeloberfläche

$$\vec{n}(\varphi, \vartheta) = \Phi(\varphi, \vartheta)\,.$$

**(d)** Die Rotation von $\vec{X}$ berechent sich zu

$$\operatorname{rot}\vec{X} = \begin{pmatrix} xz^2 - xz^2 \\ z(1+y^2) - y^2 - z \\ yz^2 + x - yz^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$$

**(e)** Nach Satz vo Stokes gilt

$$\begin{aligned}\int_{\partial M} \vec{X} \cdot d\vec{x} &= \int_M \tilde{\mathrm{X}} \cdot d\vec{A} \\ &= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\cos\varphi\sin\vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\cos\varphi\sin\vartheta \\ 2\sin\varphi\sin\vartheta \\ 2\cos\vartheta \end{pmatrix} \, d\vartheta d\varphi \\ &= 4\int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos\vartheta\sin\vartheta \, d\vartheta = 0\end{aligned}$$

---

**Aufgabe 4** ($8 + 7 = 15$ *Punkte*)

**(a)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} Y(t)$$

sowie die spezielle Lösung $\tilde{Y}(t)$ mit $\tilde{Y}(0) = (0, 0, 1)$.

**(b)** Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$u''(t) - 4u'(t) + 3u(t) = 8e^{-t}\,, \qquad u(0) = u'(0) = 0\,.$$

---

**(a)** Eigenwerte:

$$(1-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda) \stackrel{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 1\,, \quad \lambda_2 = 3\,, \quad \lambda_3 = 5$$

Die dazugehörigen Eigenvektoren sind

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

Damit ist die allgemeine Lösung

$$Y(t) = a_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\,, \qquad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$$

Die Anfangswerte liefern

$$\tilde{Y}(0) = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$a_1 = 1\,, \quad a_2 = -2\,, \quad a_3 = 1\,.$$

Die spezielle Lösung ist dann

$$\tilde{Y}(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

**(b)** Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1\lambda_2 = 3\,.$$

Damit ist die homogene Lösung gegeben durch

$$u_h(t) = a_1 e^t + a_2 e^{3t}\,, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Ansatz für die partikuläre Lösung ist

$$u_p(t) = Ce^{-t}\,.$$

Ableiten und Einsetzen liefert

$$Ce^{-t} + 4Ce^{-t} + 3Ce^{-t} \stackrel{!}{=} 8e^{-t} \quad \Leftrightarrow \quad 8C = 8 \quad \Leftrightarrow \quad C = 1\,.$$

Die allgemeine Lösung ist dann

$$u(t) = u_p(t) + u_h(t) = e^{-t} + a_1 e^t + a_2 e^{3t}\,, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Anfangswerte einsetzen führt zu

$$\begin{cases} u(0) = 1 + a_1 + a_2 \stackrel{!}{=} 0 \\ u'(0) = -1 + a_1 + 3a_2 \stackrel{!}{=} 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a_1 = -2\,, a_2 = 1\,.$$

Damit ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$u(t) = e^{-t} - 2e^t + e^{3t}\,.$$

**Aufgabe 5** ($4+6+6=16$ *Punkte*)

Eine zweidimensionale Zufallsvariable $(X,Y)$ besitze die Dichte

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & \text{für } 0<x<1 \text{ und } 0<y<3x^2\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

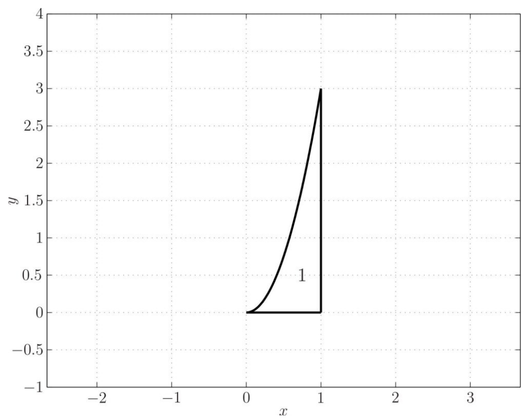
**(a)** Skizzieren Sie in einem Koordinatensystem den Bereich, in dem $f$ von Null verschieden ist und weisen Sie nach, dass es sich um eine Wahrscheinlichkeitsdichte handelt.

**(b)** Zeigen Sie, dass $X$ und $Y$ stochastisch abhängig sind. Bestimmen Sie des weiteren die Standardabweichung von $X$.

**(c)** Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(X>\frac{1}{3}|2X+Y<1)$

---

**(a)** Skizze:




Damit $f(x,y)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist muss gelten $\int_0^1\int_0^{3x^2} f(x,y)dydx=1$.

$$\int_0^1\int_0^{3x^2} 1dydx=\int_0^1 3x^2dx=1$$

**(b)** Zwei Zufallsvariablen sind stochastisch abhängig wenn $E(X\cdot Y)\neq E(X)E(Y)$ ist.

$$E(X)=\int_0^1\int_0^{3x^2} x\ dydx=\frac{3}{4}$$
$$E(Y)=\int_0^1\int_0^{3x^2} y\ dydx=\frac{9}{10}$$
$$E(XY)=\int_0^1\int_0^{3x^2} xy\ dydx=\frac{3}{4}\neq\frac{3}{4}\cdot\frac{9}{10}$$

Für die Standardabweichung $\sigma(X)=\sqrt{E(X^2)-E(X)^2}$ benötigen wir noch $E(X^2)$

$$E(X^2)=\int_0^1\int_0^{3x^2} x^2\ dydx=\frac{3}{5}$$
$$\sigma(X)=\sqrt{E(X^2)-E(X)^2}=\sqrt{\frac{3}{80}}$$

**(c)** Nach Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit gilt

$$P(X > 1/3 | 2X + Y < 1) = \frac{P(X > 1/3 \text{ und } 2X + Y < 1)}{P(2X + Y < 1)} .$$

Außerdem impliziert $X > 1/2$, dass $2X + Y > 1$ gilt. Damit gilt

$$P(X > 1/3 \text{ und } 2X + Y < 1) = \int_{1/3}^{1/2} \int_{0}^{1-2x} 1 \; dxdy = \frac{1}{36}$$

Weiterhin gilt

$$X \leq \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad Y < 3X^2 \leq \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad 2X + Y < 1$$

und damit

$$P(X \leq 1/3 \text{ und } 2X + Y < 1) = P(X \leq 1/3) = \int_{0}^{1/3} \int_{0}^{3x^2} 1 \; dydx = \frac{1}{27}$$

Mit

$$P(2X + Y < 1) = P(X > \frac{1}{3} \bigcap 2X + Y < 1) + P(X \leq \frac{1}{3} \bigcap 2X + Y < 1) = \frac{1}{36} + \frac{1}{27}$$

ist dann die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P(X > 1/3 | 2X + Y < 1) = \frac{3}{7}$$