Klausur der Modulprüfung / Diplomvorprüfung

für **B.Sc. geod**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- Bearbeitungszeit: 120 Minuten
- Erlaubte Hilfsmittel: **10 Seiten DIN A4 eigenhändig beschrieben.**
- Bearbeitungen mit Bleistift, Grün- oder Rotstift sind nicht zulässig!
- Lesen Sie zunächst die Aufgabenstellungen aufmerksam durch und beachten Sie, dass je nach Lösungsweg die gegebenen Hinweise hilfreich sein können.
- In den **Aufgaben 4 – 6** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung der Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen und die Matrikelnummer.
- In den **den Aufgaben 1 – 3** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 04.05.2011 über das Studenteninformationssystem der Universität Stuttgart (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekannt gegeben.
- Die Klausureinsicht wird voraussichtlich am 06.05.2011 stattfinden, Ort und Uhrzeit werden auf `www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM3-Kuehnel-WS1011/` bekannt gegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich **persönlich** vom 11.05.2011 bis zum 13.5.2011 bei Marcel Bliem (V57 8.155, `bliem@mathematik.uni-stuttgart.de`) einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Die mündlichen Nachprüfungen finden vom **24.05.2011 bis 26.05.2011** statt.

Name, Vorname	Matrikelnummer	Studiengang

Aufgabe 1 ($1+1+1+2+2=7$ *Punkte*)

Geben Sie bei den folgenden Aussagen an, ob Sie wahr oder falsch sind. Für jede falsche Antwort gibt es einen Punkt Abzug, die Aufgabe kann aber insgesamt nicht mit weniger als 0 Punkten bewertet werden.

(a) Für jede stetige Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und jeden Punkt (x_0, y_0) ist die Differentialgleichung der Form

$$y'(x) = F(y(x), x), \qquad y(x_0) = y_0$$

eindeutig lösbar.

falsch

(b) Für jede stückweise stetige, periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert ihre Fourierreihe an jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ gegen $f(x)$.

falsch

(c) Sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Jede in der Fläche enthaltene Gerade ist eine Geodätische.

wahr

(d) Die Differentialgleichung

$$xy^2 - x^2yy' = 0$$

ist exakt.

falsch

(e) Die Kurve $c : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$c(t) = \left(-t^2\,,\, \tfrac{1}{3}t^3 + 2t\,,\, -t\right)$$

ist nach Bogenlänge parametrisiert.

falsch

Aufgabe 2 (7 *Punkte*)

Sei

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ y \geq 0\, z \geq 0\}.$$

Berechnen Sie das folgende mehrdimensionale Integral in Kugelkoordinaten

$$\vec{x}(r, \varphi, \vartheta) = (r\cos\varphi\sin\vartheta\,,\ r\sin\varphi\sin\vartheta\,,\ r\cos\vartheta)\,.$$

Fassen Sie den Integranden soweit wie möglich zusammen, bevor Sie ihn eintragen.

$$\int\limits_D (x^2 + y^2 - z^2)\, dV = \int_{r=\boxed{0}}^{\boxed{1}} \int_{\varphi=\boxed{0}}^{\boxed{\pi}} \int_{\vartheta=\boxed{0}}^{\boxed{\frac{\pi}{2}}} \boxed{r^4(\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta)\sin\vartheta}\; d\vartheta\, d\varphi\, dr$$

$$= \boxed{\tfrac{\pi}{15}}$$

Aufgabe 3 ($5 + 3 = 8$ *Punkte*)

(a) Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$y' = -\frac{e^{-2\frac{y}{x}}}{x} + \frac{y}{x}, \qquad y(2) = 0\,.$$

Substituieren Sie $u = yx^{-1}$ und geben Sie die Differentialgleichung für u an.

$$u'(x) = \boxed{-e^{-2u}/x^2}$$

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y(x) = \boxed{-\tfrac{x}{2}\ln(\tfrac{x}{2})}$$

(b) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung zu

$$y''' - 2y'' + y' = 0$$

$$y(x) = \boxed{c_1 + c_2 e^x + c_3 x e^x \qquad c_1, c_2, c_2 \in \mathbb{R}}$$

Aufgabe 4 $(2+6+5=13$ *Punkte*$)$

Gegeben ist der Körper

$$K=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \colon 0\le x\le 2,\ z\ge 0\,, y^2-2y+z^2\le 8\right\}.$$

(a) Was ist K für ein Körper? Fertigen Sie eine Skizze an.

(b) Bestimmen Sie eine Parametrisierung des Körpers K und berechnen Sie dessen Masse m_K für die Dichteverteilung

$$\rho_K(x,y,z)=x+y-1\,.$$

(c) Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{X}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x^2 \\ yz^2-x^3z-x^2z^2 \\ z(y-1)^2-x^3 \end{pmatrix}$$

durch die Oberfläche von K nach außen.

Hinweis: Die Menge

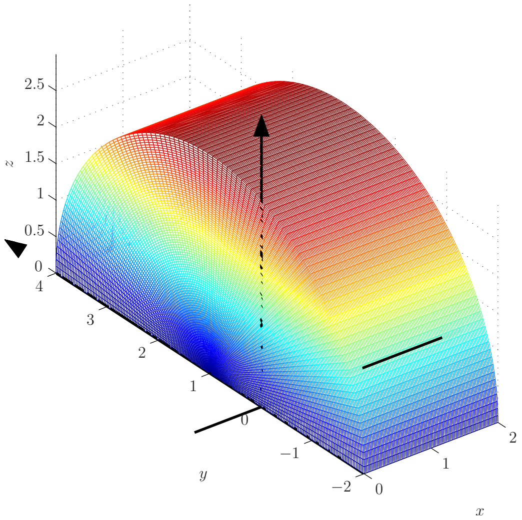
$$Z=\{(x,y,z)\colon y^2+z^2\le r^2\}$$

ist der Vollzylinder mit Radius r um die x-Achse.

(a) Es gilt

$$y^2-2y+z^2\le 8 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (y-1)^2+z^2\le 9$$

Mit dem Hinweis zusammen ergibt sieht man, dass K der Halbzylinder um die in y-Richtung um 1 verschobene x-Achse mit Höhe 2 und Radius 3 ist.



(b) Aus der Skizze kann die Parametrisierung

$$\vec{x}(x,r,\varphi)=\big(x\,,\ r\cos\varphi+1\,,\ r\sin\varphi\big)$$

mit

$$0 \le x \le 2, \qquad 0 \le r \le 3, \qquad 0 \le \varphi \le \pi$$

entnommen werden. Die Masse berechnet sich zu

$$m_K = \int_K \varrho_k \, dV = \int_{r=0}^{3} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{x=0}^{2} \big(x + r\cos\varphi\big) r \, dx \, d\varphi \, dr = \pi \int_{r=0}^{3} \int_{x=0}^{2} xr \, dx \, dr + 2 \int_{r=0}^{3} \int_{\varphi=0}^{\pi} r^2 \cos\varphi \, d\varphi \, dr$$

$$= \pi \Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^2 \Big[\frac{r^2}{2}\Big]_0^3 + 2\Big[\frac{r^3}{3}\Big]_0^3 \big[\sin\varphi\big]_0^\pi = 9\pi$$

(c) Es wird der Satz von Gauß benutzt. Die Divergenz des Vektorfeldes ist

$$\operatorname{div} \vec{X} = -x + z^2 + (y-1)^2 \,.$$

Damit gilt

$$\int_{\partial K} \vec{X} \cdot d\vec{A} = \int_K \operatorname{div} \vec{X} \, dV = \int_{r=0}^{3} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{x=0}^{2} \big(-x + r^2 \sin^2\varphi + r^2 \cos^2\varphi\big) r \, dx \, d\varphi \, dr$$

$$= -\pi \int_{r=0}^{3} \int_{x=0}^{2} xr \, dx \, dr + 2\pi \int_{r=0}^{3} r^3 \, dr = -\pi \Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^2 \Big[\frac{r^2}{2}\Big]_0^3 + 2\pi \Big[\frac{r^4}{4}\Big]_0^3$$

$$= -9\pi + \frac{81\pi}{2} = \frac{-18\pi}{2} + \frac{81\pi}{2} = \frac{63\pi}{2}$$

Aufgabe 5 ($5+3+4 = 12$ *Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } -\pi \le x < -\frac{\pi}{2}, \\ x, & \text{für } -\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{für } \frac{\pi}{2} \le x < \pi. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe von f. Ausdrücke der Form $\cos(\frac{k\pi}{2})$ oder $\sin(\frac{k\pi}{2})$ müssen an dieser Stelle nicht ausgewertet werden.

(b) Welchen Wert nimmt die Fourierreihe bei $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{\pi}{2}$ und $x_3 = \frac{\pi}{2}$ an?

(c) Bestimmen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^2}$$

durch Auswerten der Fourierreihe bei $x = \frac{\pi}{2}$.

Hinweis: Es gilt für $k \in \mathbb{N}_0$

$$\cos(\tfrac{k\pi}{2}) \sin(\tfrac{k\pi}{2}) = 0 \qquad \text{und} \qquad \sin^2(\tfrac{k\pi}{2}) = \begin{cases} 0, & \text{für } k = 0, 2, 4, \dots, \\ 1, & \text{für } k = 1, 3, 5, \dots. \end{cases}$$

(a) Zu berechnen ist die Fourierreihe

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big)\,.$$

Da f eine ungerade Funktion ist, gilt $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Die b_k berechnen sich zu

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{k}\big[x\cos(kx)\big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{k}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(kx)\,dx\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2k}\cos\big(\frac{\pi k}{2}\big) - \frac{\pi}{2k}\cos\big(-\frac{\pi k}{2}\big) + \frac{1}{k^2}\big[\sin(kx)\big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right) = -\frac{\cos(\frac{\pi k}{2})}{k} + \frac{2\sin(\frac{\pi k}{2})}{\pi k^2} \end{aligned}$$

Damit ist die Fourierreihe

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2\sin(\frac{\pi k}{2})}{\pi k^2} - \frac{\cos(\frac{\pi k}{2})}{k}\right)\sin(kx)\,.$$

(b) Der Wert der Fourierreihe an der Stelle x_0 ist Mittelwert aus rechts- und linksseitigem Grenzwert von f. Damit hat die Fourierreihe den Wert 0 bei 0, den Wert $-\frac{\pi}{4}$ bei $-\frac{\pi}{2}$ und den Wert $\frac{\pi}{4}$ bei $\frac{\pi}{2}$.

(c) Nach (b) gilt

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2\sin^2(\frac{\pi k}{2})}{\pi k^2} - \frac{\cos(\frac{\pi k}{2})\sin(\frac{\pi k}{2})}{k}\right) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2(\frac{\pi k}{2})}{k^2} = \frac{2}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(2l+1)^2}.$$

Damit folgt

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(2l+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Aufgabe 6 ($7 + 6 = 13$ *Punkte*)

Gegeben sei die Drehfläche $f : (0, \infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ durch

$$f(t, \varphi) = \big(t \cos\varphi\,,\; t \sin\varphi\,,\; e^t\big).$$

(a) Berechnen Sie die erste und zweite Fundamentalform sowie die Gauß-Krümmung dieser Fläche.

(b) Berechne Sie die geodätische Krümmung κ_g der Kurve $\varphi \mapsto f(1, \varphi)$.

Hinweis: Wegen der Gleichung $\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_\nu^2$ kann es einfacher sein, die Krümmung κ als Raumkurve sowie die Normalkrümmung κ_ν auszurechnen.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
f_t &= \big(\cos\varphi\,,\; \sin\varphi\,,\; e^t\big)\\
f_\varphi &= \big(-t \sin\varphi\,,\; t\cos\varphi\,,\; 0\big)\\
f_{tt} &= \big(0\,,\; 0\,,\; e^t\big)\\
f_{\varphi\varphi} &= \big(-\cos\varphi\,,\; -\sin\varphi\,,\; 0\big)\\
f_{t\varphi} &= \big(-\sin\varphi\,,\; \cos\varphi\,,\; 0\big)\\
\nu &= \frac{f_t \times f_\varphi}{\|f_t \times f_\varphi\|} = \frac{1}{\sqrt{e^{2t}+1}}\big(-e^t\cos\varphi\,,\; -e^t \sin\varphi\,,\; 1\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_t \cdot f_t &= 1 + e^{2t}\\
f_\varphi \cdot f_\varphi &= t^2\\
f_t \cdot f_\varphi &= 0\\
\nu \cdot f_{tt} &= \frac{e^t}{\sqrt{e^{2t}+1}}\\
\nu \cdot f_{\varphi\varphi} &= \frac{te^t}{\sqrt{e^{2t}+1}}\\
\nu \cdot f_{t\varphi} &= 0\,.
\end{aligned}$$

Damit ist die erste Fundamentalform

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 + e^{2t} & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix}\,,$$

die zweite Fundamentalform

$$(h_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{e^t}{\sqrt{e^{2t}+1}} & 0 \\ 0 & \frac{te^t}{\sqrt{e^{2t}+1}} \end{pmatrix}$$

und die Gauß-Krümmung

$$K = \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})} = \frac{e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2)t}\,.$$

(b) Die Kurve

$$c: \ \varphi \mapsto f(1,\varphi) = \big(\cos\varphi\,,\,\sin\varphi\,,\,e\big)$$

ist ein Kreis mit Radius 1, d.h. die Krümmung ist

$$\kappa = 1$$

Die Normalkrümmung ist gegeben durch

$$\kappa_\nu = c''(\varphi)\cdot\nu(c(\varphi)) = \frac{1}{\sqrt{e^2+1}}\begin{pmatrix} -e\cos\varphi \\ -e\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{e}{\sqrt{e^2+1}}\,.$$

Damit ist die geodätische Krümmung

$$\kappa_g = \pm\sqrt{\kappa^2-\kappa_\nu^2} = \pm\frac{e}{\sqrt{e^2+1}}\,.$$