Klausur der Modulprüfung / Diplomvorprüfung

für **Dipl. aer**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- Bearbeitungszeit: 120 Minuten
- Erlaubte Hilfsmittel: **10 Seiten DIN A4 eigenhändig beschrieben.**
- Bearbeitungen mit Bleistift, Grün- oder Rotstift sind nicht zulässig!
- Lesen Sie zunächst die Aufgabenstellungen aufmerksam durch und beachten Sie, dass je nach Lösungsweg die gegebenen Hinweise hilfreich sein können.
- In den **Aufgaben 3 – 5** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung der Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen und die Matrikelnummer.
- In den **Aufgaben 1 – 2** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 20.10.2011 über das Studenteninformationssystem der Universität Stuttgart (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekannt gegeben.
- Die Klausureinsicht wird voraussichtlich am 25.10.2011 stattfinden, Ort und Uhrzeit werden auf `www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM3-Kuehnel-WS1011/` bekannt gegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich **persönlich** vom 26.10.2011 bis zum 31.11.2011 bei Tillmann Jentsch (V57 7.556, `jentsch@mathematik.uni-stuttgart.de`) einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Die mündlichen Nachprüfungen finden vom **04.11.2011 bis 15.11.2011** statt.

Name, Vorname	Matrikelnummer	Studiengang

Aufgabe 1 ($2+4+3+3 = 12$ *Punkte*) Bestimmen Sie die Lösung des reellen Anfangswertproblems

$$y'(x) + 2\sin(x)\cos(x)\,y(x) = \sin(x)\cos(x)\,y^2(x)\,, \qquad y(0) = 1\,,$$

durch Substitution $u = y^{-1}$.

(a) Die Differentialgleichung für u lautet

$$u'(x) = \boxed{}$$

(b) Berechnen Sie als nächstes die unbestimmten Integrale

$$\int 2\sin(x)\cos(x)\,dx = \boxed{}$$

und

$$\int -\sin(x)\cos(x)e^{-\sin^2(x)}\,dx = \boxed{}$$

(c) Damit ist die allgemeine Lösung für u gegeben durch

$$u(x) = \boxed{}$$

Die allgemeine Lösung für y ist entsprechend

$$y(x) = \boxed{}$$

(d) Die spezielle Lösung mit $y(0) = 1$ ist

$$y(x) = \boxed{}$$

Aufgabe 2 (7 *Punkte*)

Sei

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ y \ge 0\}.$$

Berechnen Sie das folgende mehrdimensionale Integral in Kugelkoordinaten

$$\vec{x}(r,\varphi,\vartheta) = (r\cos\varphi\sin\vartheta\,,\ r\sin\varphi\sin\vartheta\,,\ r\cos\vartheta)\,.$$

Fassen Sie den Integranden soweit wie möglich zusammen, bevor Sie ihn eintragen.

$$\int_D (-x^2 - y^2 + z)\,dV = \int_{r=\boxed{}}^{\boxed{}} \int_{\varphi=\boxed{}}^{\boxed{}} \int_{\vartheta=\boxed{}}^{\boxed{}} \boxed{}\, d\vartheta\, d\varphi\, dr$$

$$= \boxed{}$$

Aufgabe 3 ($8 + 1 + 7 = 16$ *Punkte*)

Gegeben ist der Kegel K durch

$$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \le 1\,,\ z \le 1 - \sqrt{x^2+y^2}\right\}$$

und das Vektorfeld $\vec{X} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$\vec{X}(x,y,z) = \begin{pmatrix} zx + x\arctan(z) \\ zy - y\arctan(z) \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das Volumen V und den Schwerpunkt $\vec{x}_S$ des Kegels.

(b) Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes $\vec{X}$.

(c) Die Oberfläche ∂K des Kegels läßt sich in zwei Teilflächen

$$F_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \le 1\,,\ z = 0\right\}$$

und

$$F_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \le 1\,,\ z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}\right\}$$

zerlegen. Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß den Fluß von $\vec{X}$ durch F_2 nach oben.

Aufgabe 4 (12 *Punkte*)

Lösen Sie das reelle Anfangswertproblem

$$y''(x) + 4y(x) = 2\cos(2x) + 4x^2$$

mit $y(0) = y'(0) = 1$.

Aufgabe 5 (5 *Punkte*)

Die Fourier-Transformierte $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\mathrm{i}\omega x}$ von $f(x) = e^{-\alpha x^2}$, $\alpha > 0$ ist gegeben durch

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} .$$

Bestimmen Sie die Fouriertransformierte zu

$$g(x) = \frac{d^2}{dx^2} e^{-\frac{x^2}{4} - \mathrm{i}x}$$

Aufgabe 6 ($2 + 3 + 3 = 8$ *Punkte*)

Eine zweidimensionale Zufallsvariable (X, Y) besitze die Dichte

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^3}\,, & \text{für } 1 \leq x < +\infty \text{ und } 0 \leq y \leq x\,, \\ 0\,, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie in einem Koordinatensystem den Bereich, in dem f von Null verschieden ist und weisen Sie nach, dass es sich um eine Wahrscheinlichkeitsdichte handelt.

(b) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert von X nicht existiert und finden Sie x_0 und y_0 mit

$$P(X > x_0) = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad P(Y > y_0) = \frac{1}{2}$$

(c) Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(X < 5 | Y > 3)$.