Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 240 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 − 9** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 10 − 15** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 17. 10. 2011 über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

VIEL ERFOLG!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **18. 10.** bis **21. 10. 2011** mit Jörg Hörner (Raum V 57.8.160) einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*8 Punkte*) Gegeben sind die Mengen

$$M_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - \mathrm{i}| \leqq \operatorname{Im}(z + \mathrm{i}) \right\} \quad \text{und} \quad M_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z - \mathrm{i}| = \frac{4}{|\bar{z} + \mathrm{i}|} \right\}$$

in der komplexen Zahlenebene.

(a) Skizzieren Sie M_1 und M_2.

(b) Lesen Sie aus Ihrer Skizze ab, welche der komplexen Zahlen, die in beiden Mengen liegen, den kleinsten Betrag haben (d.h. am nächsten an $z = 0$ liegen) und geben Sie diesen minimalen Betrag an.

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Gegeben sind die Vektoren

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; f_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und der Punkt $P = (2, -2, 1)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren f_1, f_2, f_3 paarweise orthogonal sind, aber kein Orthonormal-System bilden.

(b) Sei E die Ebene senkrecht zu f_1 durch den Punkt P. Geben Sie die Hessesche Normalform der Ebene E an und bestimmen Sie den Abstand der Ebene vom Ursprung O.

Aufgabe 3 (*6 Punkte*)
Gegeben ist das reelle lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = A_\alpha = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -6 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) Für welche Werte des Parameters α ist das System eindeutig lösbar?

(b) Geben Sie den Rang der Matrix A_α in Abhängigkeit von α an.

(c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems für $\alpha = -3$.

(d) Gibt es einen Parameterwert α, für den in einer Lösung des Gleichungssystems alle Variablen den gleichen Wert (d.h. $x_1 = x_2 = x_3$) annehmen?

Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Gegeben sei die folgende Quadrik:

$$2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 - 1 = 0$$

Bestimmen Sie die euklidische Normalform und die Gestalt der Quadrik.

Aufgabe 5 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen.

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n-\sqrt{n^2+2}\right)$ **(b)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(\sin(\pi/4+1/n))$

Aufgabe 6 (*6 Punkte*)

(a) Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2+k}{2^k}$ auf Konvergenz.

(b) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,\frac{4^k}{k!}$.

(c) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5^k}+\frac{(-2)^k}{6^k}\right)$.

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+\tan x}{x+\sin x}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to0+0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$

Aufgabe 8 (*7 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\colon(x,y)\mapsto x^3-y^2-2x\,.$$

(a) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f. Welcher Typ liegt jeweils vor?

(b) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f auf der Geraden $y=x-1$.

Aufgabe 9 (*8 Punkte*) Gegeben seien die Parameter $\alpha\in\mathbb{R}$ und $\beta\in\mathbb{R}$ sowie das Vektorfeld

$$f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\colon\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}2\alpha xy+3\sin(y)+5yz\\\alpha x^2+3x\cos(y)+5xz\\\beta xy\end{pmatrix}.$$

(a) Für welche Parameter α, β besitzt f ein Potential?

(b) Berechnen Sie ein Potential von f für die Parameterwerte aus **(a)**.

(c) Sei nun $\beta=5$ und folgende Parametrisierung der Kurve K gegeben.

$$C\colon[0,1]\to\mathbb{R}^3\colon t\mapsto\begin{pmatrix}1+t\\t\pi\\0\end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie alle $\alpha\in\mathbb{R}$ für die

$$\int_K f(s)\bullet ds=1$$

gilt.

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 10 (*7 Punkte*)

Gegeben ist die Menge $M = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ von vier Vektoren des $\mathbb{R}^4$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 16 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie v_4 als Linearkombination der Vektoren v_1 und v_2 dar, d.h. bestimmen Sie Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass $v_4 = \alpha v_1 + \beta v_2$.

$\alpha =$ $\qquad$ $\beta =$

(b) Stellen Sie v_4 als Linearkombination der Vektoren v_2 und v_3 dar, d.h. bestimmen Sie Parameter $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ so, dass $v_4 = \gamma v_2 + \delta v_3$.

$\gamma =$ $\qquad$ $\delta =$

(c) Geben Sie eine Basis $B \subsetneqq M$ des von M erzeugten Vektorraums $W = \mathrm{L}(M)$ aus Vektoren von M an.

$B :$

(d) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $\tilde{B}$ für W in dem Sie das Schmidtsche Orthonormierungsverfahren auf die Basis B anwenden.

$\tilde{B} :$

Aufgabe 11 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie folgende Ableitungen in den jeweiligen Definitionsbereichen.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} x\, e^{2x} =$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \frac{x-3}{(x+1)^2} =$$

Aufgabe 12 (*4 Punkte*) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a+b\mathrm{i} & 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 1 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3} \qquad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}.$$

(a) Geben Sie die Determinante von A in Abhängigkeit von a und b an.

$\det A =$ ☐

(b) Für welche Paare $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ haben alle Eigenwerte die algebraische Vielfachheit 1?

☐

(c) Für welche Werte von a und b ist der Vektor $\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor?

$(a,b) =$ ☐

Aufgabe 13 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 3 der folgenden Funktionen um den angegebenen Entwicklungspunkt x_0.

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cos(x/2)\,, \quad x_0 = 0$

$T_3(f, x, 0) =$ ☐

(b) $g\colon \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \ln(x^2)\,, \quad x_0 = 1$

$T_3(g, x, 1) =$ ☐

Aufgabe 14 (*6 Punkte*) Berechnen Sie folgende Integrale.

$$\int (x+1)\big(5e^x - \sin(2x)\big)\,\mathrm{d}\,x =$$ ☐

$$\int \cos(x)\,\big(\sin(x)^3 + 3\sin(x)^2 + 3\sin(x) + 1\big)\,\mathrm{d}\,x =$$ ☐

$$\int \frac{3x^2+2}{x^3+2x-1}\,\mathrm{d}\,x =$$ ☐

$$\int_{-2}^{-1} \frac{3x^2+2}{x^3+2x-1}\,\mathrm{d}\,x =$$ ☐

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 15 (*7 Punkte*) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \sin(x)e^{x-y}$$

den Gradienten

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix}$$

und die Hesse-Matrix

$$\mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2\big(f,(x,y),(\pi/2,1)\big)$ der zweiten Stufe um den Entwicklungspunkt $(x_0,y_0) = (\pi/2,1)$.

$$T_2\big(f,(x,y),(\pi/2,1)\big) = \boxed{}$$