Aufgabe 1 (*15 Punkte*) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

(b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix T und eine Diagonalmatrix D mit $D = T^\top AT$.

(c) Zeigen Sie, dass $U := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid A^2x = Ax\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist, und bestimmen Sie die Dimension von U.

(a) Wir bestimmen das charakteristische Polynom von A:

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= (3-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (3-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1 \cdot 1) = (3-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3). \end{aligned}$$

Die Nullstellen von χ_A sind dann gegeben durch $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ und $\lambda_3 = 1$. Damit haben wir einen einfachen Eigenwert 1 und einen doppelten Eigenwert 3.

Der Eigenraum E_1 zum Eigenwert 1 ist gerade die Lösungsmenge des homogenen LGS

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also ist $E_1 = L((0,1,-1)^\top)$.

Ebenso bestimmen wir den Eigenraum E_3 zum Eigenwert 3:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad E_3 = L((1,0,0)^\top, (0,1,1)^\top).$$

(b) Die oben berechneten Eigenvektoren sind bereits paarweise orthogonal. Es muss also nur noch normiert werden. Damit haben wir

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) Es ist $x \in U \Leftrightarrow A^2x - Ax = 0 \Leftrightarrow (A^2 - A)x = 0$. Also ist $U = \operatorname{Kern}(A^2 - A)$ und somit ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

(Alternativ können auch die Unterraumaxiome direkt nachgewiesen werden:

(i) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x \in U$, dann ist

$$A^2(\alpha x) \overset{A^2 \text{ linear}}{=} \alpha(A^2 x) \overset{x\in U}{=} \alpha(Ax) \overset{A \text{ linear}}{=} A(\alpha x)$$

und somit $\alpha x \in U$.

(ii) Seien $x, y \in U$, dann ist

$$A^2(x+y) \overset{A^2 \text{ linear}}{=} A^2 x + A^2 y \overset{x,y\in U}{=} Ax + Ay \overset{A \text{ linear}}{=} A(x+y)$$

und somit $(x+y) \in U$.)

Zur Bestimmung von $\dim U$:

- **Möglichkeit 1**:

  Wir betrachten das homogene LGS $(A^2 - A)x = 0$:

$$A^2 - A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Kern}(A^2 - A) = L((0,1,-1)^\top) \quad \Rightarrow \quad \dim U = \dim \mathrm{Kern}(A^2 - A) = 1.$$

- **Möglichkeit 2**:

  Es ist $(A^2 - A)x = 0 \Leftrightarrow A(A-I)x = 0$. Da A keinen Nulleigenwert besitzt, existiert die Inverse A^{-1}, und wir haben

$$A(A-I)x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (A-I)x = A^{-1}0 = 0.$$

  Damit ist $U = E_1$ und nach Teil **(a)** ist $\dim U = \dim E_1 = 1$.

Aufgabe 2 (*9 Punkte*) Gegeben seien die Potenzreihen

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2} x^n \quad \text{und} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2+(-1)^n)^n x^n .$$

(a) Bestimmen Sie die Konvergenzradien von f und g.

(b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe f konvergiert.

(c) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe f absolut konvergiert.

(a) (i) Es ist $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ mit $a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n^2}$. Damit ist

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n+2}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{n+1} = \frac{n^3+2n^2}{n^3+3n^2+3n+1} \to 1 \text{ für } n \to \infty.$$

Somit haben wir als Konvergenzradius $\rho = 1/1 = 1$.

(ii) Es ist $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $a_n = (2+(-1)^n)^n$. Damit ist

$$\sqrt[n]{|a_n|} = (2+(-1)^n) = \begin{cases} 3 & \text{, für gerades } n, \\ 1 & \text{, für ungerades } n. \end{cases}$$

Somit haben wir als Konvergenzradius $\rho = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = \dfrac{1}{3}$.

(b) Nach **(a)** (i) haben wir auf jeden Fall absolute Konvergenz für alle $x \in (-1,1)$ und Divergenz für $|x| > 1$. Es bleiben noch die Randpunkte ± 1 zu überprüfen:

(i) $x = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2} 1^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}_{\text{monoton fallende Nullfolge}} \quad \Rightarrow \text{ konvergent wg. Leibnizkriterium}$$

(ii) $x = -1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2} (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \geqq \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{div. Minorante}} \quad \Rightarrow \text{ divergent wg. Minorantenkriterium}$$

Insgesamt haben wir damit, dass die Potenzreihe f genau für alle $x \in (-1,1]$ konvergiert.

(c) Wie oben bereits gezeigt, liegt absolute Konvergenz für alle $x \in (-1,1)$ vor. Die Reihe konvergiert in den Randpunkten ± 1 nicht absolut, da

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(\pm 1)^n| = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}}_{\text{divergent, s.o.}} .$$

Aufgabe 3 (*11 Punkte*)

(a) Geben Sie für die folgenden uneigentlichen Integrale jeweils an, ob sie konvergieren. Begründen Sie Ihre Antworten.

(i) $\displaystyle\int_0^{10} \frac{e^x}{x^3}\,\mathrm{d}x$ (ii) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2\cos(e^x)}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x$

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Außerdem sei $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$ und $f(x) > 0$ für alle $x > 0$. Zeigen Sie: Das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(f(x))^\gamma}\,\mathrm{d}x$ konvergiert für $0 < \gamma < 1$.

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Taylor.

(a) (i) $x \mapsto \dfrac{e^x}{x^3}$ ist auf jedem Intervall $[\alpha, 10]$, $0 < \alpha < 10$, Riemann-integrierbar. Nach dem Minorantenkriterium liegt Divergenz vor, denn es ist

$$\int_0^{10} \frac{e^x}{x^3}\,\mathrm{d}x \geqq \underbrace{\int_0^{10} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x}_{\text{divergent}}.$$

(ii) $x \mapsto \dfrac{2\cos(e^x)}{x^{3/2}}$ ist auf jedem Intervall $[1, \beta]$, $1 < \beta < \infty$, Riemann-integrierbar. Nach dem Majorantenkriterium liegt Konvergenz vor, denn es ist

$$\int_1^{\infty} \left|\frac{2\cos(e^x)}{x^{3/2}}\right|\,\mathrm{d}x \leqq 2\underbrace{\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x}_{\text{konvergent}}.$$

(b) Für jedes $\varepsilon \in (0, 1)$ ist

$$I := \int_0^1 \frac{1}{(f(x))^\gamma}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{(f(x))^\gamma}\,\mathrm{d}x}_{=:I_\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{(f(x))^\gamma}\,\mathrm{d}x.$$

Da f stetig und $f(x) > 0$ für alle $x > 0$, ist $x \mapsto \frac{1}{(f(x))^\gamma}$ Riemann-integrierbar auf jedem Intervall $[\varepsilon, 1]$, $0 < \varepsilon < 1$. Daher konvergiert I genau dann, wenn I_ε konvergiert. Sei im Folgenden $x \geqq 0$.

Lösungsvariante 1:

Dann existiert nach dem Satz von Taylor ein $\xi_x \in [0, x]$, so dass

$$f(x) = f(0 + x) = \underbrace{f(0)}_{=0} + f'(\xi_x)x.$$

Nach Voraussetzung ist $f'(0) > 0$. Da f' differenzierbar und somit stetig ist, können wir $\varepsilon > 0$ so klein wählen, dass $f'(\xi) > \frac{1}{2}f'(0)$ für alle $\xi \in [0, \varepsilon]$. Dann ist

$$I_\varepsilon \leqq \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}f'(0)x\right)^\gamma}\,\mathrm{d}x = \frac{2^\gamma}{(f'(0))^\gamma}\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{x^\gamma}\,\mathrm{d}x.$$

Für $\gamma \in (0,1)$ ist die rechte Seite eine konvergente Majorante. Damit ist die Behauptung gezeigt.

$\square$

Lösungsvariante 2:

Dann existiert nach dem Satz von Taylor ein $\xi_x \in [0,x]$, so dass

$$f(x) = f(0+x) = \underbrace{f(0)}_{=0} + \underbrace{f'(0)}_{>0} x + \frac{1}{2} f''(\xi_x) x^2.$$

Nach Voraussetzung ist $f'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Daher existiert nach dem Weierstraßschen Satz vom Minimum und Maximum $\max\limits_{\xi \in [0,1]} |f''(\xi)| =: M$. Sei nun ε so klein, dass $M\varepsilon < f'(0)$. Dann ist für alle $x \in [0,\varepsilon]$

$$\begin{aligned} f(x) = |f(x)| &= |f'(0)x + \frac{1}{2} f''(\xi_x)x^2| \\ &\geqq |f'(0)x| - \frac{1}{2}|f''(\xi_x)x^2| \\ &= f'(0)x - \frac{1}{2} \underbrace{|f''(\xi_x)|x}_{\leqq M\varepsilon < f'(0)} \cdot x \geqq \frac{1}{2} f'(0)x. \end{aligned}$$

Dann ist

$$I_\varepsilon \leqq \int_0^\varepsilon \frac{1}{\left(\frac{1}{2}f'(0)x\right)^\gamma} \, \mathrm{d}x = \frac{2^\gamma}{(f'(0))^\gamma} \int_0^\varepsilon \frac{1}{x^\gamma} \, \mathrm{d}x.$$

Für $\gamma \in (0,1)$ ist die rechte Seite eine konvergente Majorante. Damit ist die Behauptung gezeigt.

$\square$

Aufgabe 4 (*12 Punkte*) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = 2y^3 + 3x^2y - 6y - 1$. Außerdem sei $v = \frac{1}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie den Gradienten $\nabla f(x, y)$ und die Hessematrix $\mathrm{H}f(x, y)$ von f.

(b) Berechnen Sie die Richtungsableitung $\partial_v f(-1, -1)$.

(c) Berechnen Sie alle kritischen Stellen von f und bestimmen Sie jeweils, ob f dort ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder einen Sattelpunkt besitzt.

(a) Wir haben

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 6xy \\ 6y^2 + 3x^2 - 6 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}\, f(x, y) = \begin{pmatrix} 6y & 6x \\ 6x & 12y \end{pmatrix}.$$

(b) Es ist

$$\partial_v f(-1, -1) = \nabla f(-1, -1) \cdot v = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

(c) Zunächst bestimmen wir die kritischen Punkte von f.

$$\nabla f(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; 6xy = 0 \text{ und } 6y^2 + 3x^2 = 6 \;\Leftrightarrow\; (x = 0 \text{ und } 6y^2 = 6) \text{ oder } (y = 0 \text{ und } 3x^2 = 6).$$

Damit ergeben sich die vier kritischen Stellen $S_{1/2} = (0, \pm 1)$ und $S_{3/4} = (\pm\sqrt{2}, 0)$.
Zur Klassifikation betrachten wir $\mathrm{H}\, f(S_j)$, $j = 1, 2, 3, 4$.

$$\mathrm{H}\, f(S_1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \text{ ist positiv definit } \Rightarrow P_1 \text{ ist ein lokales Minimum,}$$

$$\mathrm{H}\, f(S_2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \text{ ist negativ definit } \Rightarrow P_2 \text{ ist ein lokales Maximum,}$$

$$\mathrm{H}\, f(S_3) = \begin{pmatrix} 0 & 6\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ ist indefinit } \Rightarrow P_3 \text{ ist ein Sattelpunkt,}$$

$$\mathrm{H}\, f(S_4) = \begin{pmatrix} 0 & -6\sqrt{2} \\ -6\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ ist indefinit } \Rightarrow P_4 \text{ ist ein Sattelpunkt.}$$

Aufgabe 5 (*6 Punkte*) Gegeben seien im $\mathbb{R}^3$ die Punkte

$$A = (0, 1, 3), \quad B = (1, 2, 3), \quad C = (1, 3, 5).$$

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung sowie die Hessesche Normalform der Ebene E, in der die Punkte A, B und C liegen.

Parameterdarstellung von E :

$$\text{z.B.: } x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R}$$

Hessesche Normalform von E :

$$\frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{1}{3}$$

(b) Berechnen Sie den Abstand d des Punktes $P = (4, 4, 4)$ von der Ebene E.

$$d = \boxed{1}$$

Aufgabe 6 (*4 Punkte*) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -t & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit Parameter $t \in \mathbb{R}$. Geben Sie bei **(a)**–**(c)** an, für welche t die folgenden Aussagen gelten. Wenn es keine solche t gibt, so ist $\emptyset$ einzutragen.

(a) Das Gleichungssystem besitzt eine eindeutige Lösung für	$t \in$	$\mathbb{R}\backslash\{1,2\}$
(b) Das Gleichungssystem besitzt unendlich viele Lösungen für	$t \in$	$\{2\}$
(c) Das Gleichungssystem ist nicht lösbar für	$t \in$	$\{1\}$
(d) Geben Sie die Lösung für $t = 0$ explizit an:	$(x_1, x_2, x_3) =$	$(1, 1, -1)$

Aufgabe 7 (*5 Punkte*)

(a) Geben Sie die folgende komplexe Zahl in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an:

$$\frac{5i}{4+3i} = \boxed{\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i}$$

(b) Geben Sie die folgende komplexe Zahl in der Form $re^{i\varphi}$ mit $r \in [0, +\infty)$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ an:

$$-27i = \boxed{27e^{\frac{3}{2}\pi i}}$$

(c) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^3 = -27i\ .$$

Geben Sie die Lösungen sowohl in der Form $z = re^{i\varphi}$, $r \in [0, +\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, als auch in der Form $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$\boxed{z_1 = 3e^{\frac{1}{2}\pi i} = 3i,\ z_2 = 3e^{\frac{7}{6}\pi i} = -\frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i,\ z_3 = 3e^{\frac{11}{6}\pi i} = \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i}$$

Aufgabe 8 (*4 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte und Reihenwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^7+3n^2}{7^n+4n^3} = \boxed{0}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^6+n^2}-\sqrt{n^6+5n^2}\right) = \boxed{-2}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{\sin(x^2)} = \boxed{-\dfrac{1}{2}}$

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{3n} \dfrac{1}{2^{n+3}} = \boxed{\dfrac{1}{12}}$

Aufgabe 9 (*9 Punkte*)

(a) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int x\cos(3x^2)\,\mathrm{d}x \;=\; \boxed{\left[\frac{1}{6}\sin(3x^2)\right]}$

(ii) $\displaystyle\int 3x\sin(x+1)\,\mathrm{d}x \;=\; \boxed{[3\sin(x+1) - 3x\cos(x+1)]}$

(b) Geben Sie die reelle Partialbruchzerlegung der folgenden Funktion an:

$$\frac{x^2+x-3}{(x-4)(x^2+1)} = \boxed{\frac{1}{x-4} + \frac{1}{1+x^2}}\,.$$

Berechnen Sie damit

$$\int \frac{x^2+x-3}{(x-4)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \boxed{[\ln|x-4| + \arctan(x)]}\,.$$