Datum 11.08.2012

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Klausur

Aufgaben, die unten **Teil I** sind, gehören zu Mathematik I.
Aufgaben, die unten **Teil II** sind, gehören zu Mathematik II.

Bearbeitungszeit:

Wenn Teil I und II bearbeitet wird: 180 Minuten.
Wenn nur Teil I oder II bearbeitet wird: 120 Minuten.

Zulässige Hilfsmittel:

Zwei beliebig handbeschriebene Blätter DIN A4 und ein nichtprogrammierter Taschenrechner.

Bitte eigenes **Papier** verwenden und **jedes Blatt mit Name und Matrikelnummer** versehen.

Lösungen ohne Angabe eines nachvollziehbaren **Lösungsweges** können nicht gewertet werden.

Teil I

Aufgabe 1 (14 Punkte)

a) Prüfen Sie, ob die nachstehenden Folgen konvergent oder bestimmt divergent sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert (als reelle Zahl oder ∞ oder $-\infty$) :

$$a_n := \frac{15n^3 - 10n^2}{7n^2 - 10n + 2}, \quad b_n := \frac{n^4 - 2n^2 + 1}{(n^2+1)^2}, \quad c_n := \sqrt{6n^6 + n^2} - \sqrt{6n^6 + n^3 - n^2}.$$

b) Prüfen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und bestimmen Sie sie gegebenenfalls (als reelle Zahl oder ∞ oder $-\infty$):

$$\lim_{x\to\infty} f(x), \quad \lim_{x\to(-7)} f(x), \quad \lim_{x\to 1+} f(x), \quad \lim_{x\to 1-} f(x) \text{ und } \lim_{x\to 1} f(x)$$

$$\text{mit } f(x) := \frac{x^3 + 9x^2 + 15x + 7}{x^2 + 6x - 7}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Ein Kredit in Höhe von 40 000 Euro soll mit festen monatlichen Beträgen A zurückgezahlt werden, und zwar jeweils am Ende des Monats. Der nominelle Jahreszinssatz betrage 6%, die Zinsgut- oder lastschrift erfolgt ebenfalls monatlich.
Wie gross muss A sein, damit der Kredit nach 10 Jahren vollständig abgezahlt ist?

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{3\times 3}$. Bestimmen Sie A^2 und die zu A inverse Matrix A^{-1}.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Vorgegeben sei die Funktion

$$f(x) := x^4 - 4x^3 + 10, \; x \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie

a) die Intervalle, in denen die Funktion monoton wachsend ist, und

b) die Intervalle, in denen sie monoton fallend ist.

Prüfen Sie, ob $f(x)$ (relative) Extremwerte besitzt, und bestimmen Sie gegebenenfalls die Stelle(n), an der (denen) sie angenommen werden

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren

$$\mathbf{a}_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie

a) den Winkel zwischen den Vektoren $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$,

b) den Flächeninhalt des von $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ aufgespannten Parallelogramms und

c) das Volumen des von den drei Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ aufgespannten Spats.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Bestimmen Sie folgende Integrale:

$$\int_0^{\pi} x \, \cos x \, dx \,, \qquad \int_0^2 2x \, \cos(x^2) \, dx \,.$$

Teil II

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Erfahrungsgemäß werden auf einem Hafenmarkt $f(x) := 10 \cdot 2^{-x/100}$ Tonnen Eternit nachgefragt, wenn der Verkäufer den Gewinn zu x Euro pro Tonne ansetzt. Es kann die Nachfrage auch immer voll befriedigt werden.

a) Bestimmen Sie die Elastizität von $f(x)$ und von $f'(x)$.

b) Wie hat der Verkäufer den Gewinn pro Tonne anzusetzen, um seinen Gesamtgewinn zu maximieren?

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) := e^x \cos(\,x)$.

a) das Taylorpolynom zweiter Ordnung um $x = 0$.

b) verwenden Sie das Taylorpolynom von $f(x) := e^x \cos(\,x)$ in 3-ter Ordnung um $\int_{-1/2}^{+1/2} e^x \cos(\,x) \, \mathrm{d}x$ anzunähern.

Aufgabe 9 (15 Punkte)

Sei $f(x, y, z) := x^2 + y^2 + xz + z^2 + xyz$ auf $\mathbb{R}^3$.
Sei $g(x, y, z) := xy + 3xz - 3$ auf $\mathbb{R}^3$.

(a) Ist $(0, 0, 0)$ eine lokale Extremstelle von f? Wenn ja, was für eine?

(b) Ist $(1, 0, 1)$ eine lokale Extremstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$?
Wenn ja, was für eine?

Aufgabe 10 (6 Punkte)

a) Zerlegen Sie $f(x) = \frac{1}{(x+2)(x+1)^2}$ in Partialbrüche.

b) Berechnen Sie $\int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x$.

Aufgabe 11 (6 Punkte) Finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 2y' - 2y \;=\; 0$$

auf $\mathbb{R}$ mit $y(0) = 2$ und $y'(0) = -2$.