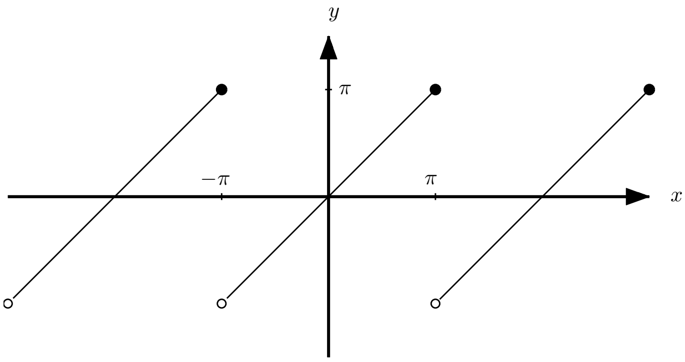
Aufgabe 1 (*7 Punkte*) Die 2π-periodische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist durch folgenden Graphen gegeben.

a) Geben Sie die Koeffizienten der reellen Fourier-Reihe von f an.

b) Geben Sie an, in welchen Punkten $x \in [-\pi, \pi]$ die Fourierreihe gegen die Funktion f konvergiert.



c) Bestimmen Sie durch Einsetzen von einem geeigneten x in die Fourierreihe von f den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(\frac{n\pi}{2}) .$$

---

a) $a_n = 0$ da $f(x) = x$ ungerade ist.

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \Big[-\frac{1}{n} x \cos(nx) \Big]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} -\frac{1}{n} \cos(nx) dx}_{=0}$$

$$= \frac{-1}{\pi n} \pi \cos(n\pi) + \frac{1}{\pi n} (-\pi) \cos(-n\pi)$$

$$= \frac{2}{n} (-1)^{n+1}$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin(nx)$$

b) In allen Punkten $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{\pi, -\pi\}$ d.h. überall bis auf Sprungstellen.

c) Setze $x = \frac{\pi}{2}$

$$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(\frac{n\pi}{2})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(\frac{n\pi}{2}) = -\frac{\pi}{4}$$

Aufgabe 2 (*7 Punkte*) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) + 4y(x) - \frac{1}{\cos(2x)} = 1, \quad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

b) Wie lautet hier die Grundlösung?

c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten oder der Green'schen Funktion eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.
(Hinweis: Die Identität $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$ könnte nützlich sein!)

---

a) Mit $y'' = -4y$ erhalten wir

$$y = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$$

b)

$$y_g = \frac{1}{2}\sin(2x)$$

c)

$$y_p(x) = -\int_0^x y_g(x-t) r(t) dt$$

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= -\int_0^x \frac{1}{2}\sin(2x-2t)(-\frac{1}{\cos(2t)} - 1)dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^x \big(\sin(2x)\cos(2t) - \sin(2t)\cos(2x)\big)(\frac{1}{\cos(2t)} + 1)dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^x \sin(2x) - \frac{\sin(2t)}{\cos(2t)}\cos(2x) + \sin(2x)\cos(2t) - \sin(2t)\cos(2x)dt \\
&= \frac{1}{2}\big[\sin(2x)t + \frac{1}{2}\ln(\cos(2t))\cos(2x) + \frac{1}{2}(\sin(2x)\sin(2t) + \cos(2x)\cos(2t))\big]_0^x \\
&= \frac{1}{2}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\ln(\cos(2x))\cos(2x) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(2x)
\end{aligned}$$

Alternative mit V.d.K.

$$c_1'(x)\cos(2x) + c_2'(x)\sin(2x) = 0$$

$$2c_1'(x)(-\sin(2x)) + 2c_2'(x)\cos(2x) = \frac{1}{\cos(2t)} + 1$$

$$A(x)c'(x) = b(x) \quad \text{mit} \quad A(x) = \begin{pmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -2\sin(2x) & 2\cos(2x) \end{pmatrix}, \quad c'(x) = \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix}$$

$$\text{und} \quad b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos(2x)} + 1 \end{pmatrix}$$

$$c'(x) = A^{-1}(x)b(x) \quad \text{mit} \quad A^{-1}(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\cos(2x) & -\sin(2x) \\ 2\sin(2x) & \cos(2x) \end{pmatrix}$$

$$c_1'(x) = \frac{1}{2}\big(- \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} - \sin(2x)\big) \Rightarrow c_1(x) = \frac{1}{4}\ln(\cos(2x)) + \frac{1}{4}\cos(2x) + \tilde{c}_1$$

$$c_2'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) \Rightarrow c_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \tilde{c}_2$$

insgesamt lautet die Lösung:

$$y_{inh} = \frac{1}{2}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\ln(\cos(2x))\cos(2x) + \frac{1}{4} + \tilde{c_1}\cos(2x) + \tilde{c_2}\sin(2x)$$

Aufgabe 3 (*10 Punkte*) Gegeben sei die partiellen Differentialgleichung

$$yu_{xx} = u_y.$$

a) Bestimmen Sie sämtliche Lösungen der Differentialgleichung, die die Form $u(x,y) = v(x)w(y)$ besitzen.

b) Bestimmen Sie alle nichttriviale Lösungen der Form $u(x,y) = v(x)w(y)$, die die Bedingungen $u(0,y) = u(\pi,y) = 0$ erfüllen.

---

a) Mit dem Ansatzt $u(x,y) = v(x)w(y)$ bekommt man folgendes

$$\frac{w'(y)}{w(y)y} = \frac{v''(x)}{v(x)} = k \quad \text{d.h.} \quad w'(y) = kyw(y) \quad \text{und} \quad v''(x) = kv(x).$$

für $w(y)$ erhalten wir

$$\frac{dw}{dy} = ykw \Rightarrow \frac{dw}{w} = ykdy \Rightarrow \ln|w| = \frac{1}{2}y^2k + c \Rightarrow w(y) = ce^{\frac{k}{2}y^2}$$

Man betrachte folgende Fallunterscheidung:
Fall 1: $k = 0 \ \Rightarrow v(x) = ax + b \quad w(y) = c$
Fall 2: $k > 0 \ \Rightarrow v(x) = c_1e^{\sqrt{k}x} + c_2e^{-\sqrt{k}x} \quad w(y) = ce^{\frac{k}{2}y^2}$
Fall 3: $k < 0 \ \Rightarrow v(x) = \tilde{c}_1e^{i\sqrt{-k}x} + \tilde{c}_2e^{-i\sqrt{-k}x}$ oder $v(x) = c_1\cos(\sqrt{-k}x) + c_2\sin(\sqrt{-k}x)$,
$c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ und $w(y) = ce^{\frac{k}{2}y^2}$

b) Nur für den Fall $k < 0$ erhalten wir nichttriviale Lösungen zu den gegebenen Anfangsbedingungen.

$$v(0) = c_1 = 0 \quad \text{und} \quad v(\pi) = c_2\sin(\sqrt{-k}\pi) = 0 \Rightarrow \sqrt{-k}\pi = n\pi \Rightarrow k = -n^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$u(x,y) = ce^{-\frac{n^2}{2}y^2}\sin(nx), n \in \mathbb{N}$$

Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Gegeben sei die Fläche S wie abgebildet.

a) Geben Sie eine Parametrisierung von S und von ∂S an.

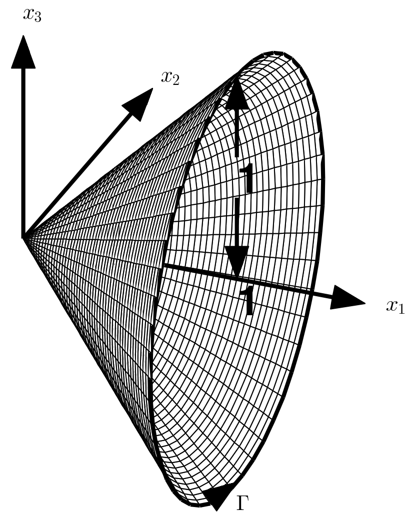
b) Geben Sie ein Vektorfeld $\vec{n}(u,v)$ an, das auf der Fläche S ohne den Ursprung senkrecht steht.

c) Berechnen Sie das Integral

$$\oint_{\partial S} g dx$$

mit Hilfe eines geeigneten Integralsatzes für das Vektorfeld

$$g(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} x_1x_3 - \frac{1}{2}x_2^2 \\ x_2x_3 - x_1x_2 + x_1 \\ \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 + x_1x_3 \end{pmatrix}.$$



---

a) Für die Fläche S lautet die Parametrisierung in Zylinderkoordinaten

$$S(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r \\ r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}, \qquad r \in [0,1] \qquad \varphi \in [0,2\pi).$$

Damit erhalten wir folgende Parametrisierung für die Randkurve:

$$\Gamma : c(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \qquad \varphi \in [0,2\pi)$$

b)

$$\vec{n}(\varphi,\theta) = S_r \times S_\varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ -r\cos(\varphi) \\ -r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

c) Nach dem Satz von Stokes gilt:

$$\oint_{\partial S} g dx = \int\int_S \operatorname{rot} g \cdot \vec{n}_e d\sigma = \int\int \operatorname{rot} g \cdot \vec{n}_e |S_\varphi \times S_r| d\varphi dr,$$

$$\operatorname{rot} g = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ -r\sin(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ -r\cos(\varphi) \\ -r\sin(\varphi) \end{pmatrix} dr d\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cos(\varphi) + r^2\sin(\varphi)\cos(\varphi) - r\sin(\varphi) dr d\varphi = 0$$

Name, Vorname:		Matrikel-Nummer:		Studien-gang:	

Aufgabe 5 (*10 Punkte*)

a) Gegeben ist das Differentialgleichungssystem $Y' = AY$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

Die Eigenwerte der Matrix A lauten

$$\boxed{\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 1}$$

und die zugehörigen Eigenräume sind

$$\boxed{V(3) = L\big((-2,2,5)^\intercal\big),\ V(2) = L\big((-1,0,3)^\intercal\big),\ V(1) = L\big((0,0,1)^\intercal\big)}$$

Geben Sie die allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems an:

$$Y_{hom}(x) = \boxed{c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} e^{3x} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2x} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{x} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.}$$

b) Geben Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems an:

$$Y' = AY + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^x \end{pmatrix}$$

$$Y_{inh}(x) = \boxed{Y_{hom}(x) + xe^x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}\ .$$

Aufgabe 6 (*8 Punkte*) Gegeben sei der Körper K

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leqq x^2 + y^2 \leqq 4, \quad 0 \leqq x, \quad 0 \leqq z \leqq 2\}$$

und das Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy\cos(y^2) - 2z \\ -\sin(y^2) + 3z^2 \\ \sin(y^2) + 2z^2 \end{pmatrix}.$$

a) Stellen Sie den Körper K mit Hilfe von Zylinderkoordinaten (r, φ, z) dar.

$$\mathrm{K} = \boxed{\{(r\cos(\varphi),\ r\sin(\varphi),\ z)| \quad 0 \leqq z \leqq 2,\ -\tfrac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \tfrac{\pi}{2} \quad \sqrt{z} \leqq r \leqq 2\}}\ .$$

b) Berechnen Sie das Volumen V von K.

$$\mathrm{V}= \boxed{3\pi}$$

c) Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes f.

$$\operatorname{div} f = \boxed{4z}$$

d) Geben Sie mit Hilfe eines geeigneten Integralsatzes an, wie der Fluss durch die Oberfläche von K (von innen nach außen) durch ein Dreifachintegral dargestellt werden kann.

$$\int\int_{\partial K} f \cdot n d\sigma = \boxed{\int\int\int_K \operatorname{div} f dv}$$

e) Berechnen Sie den Fluss durch die Oberfläche von K (von innen nach außen).

$$\int\int_{\partial K} f \cdot n d\sigma = \boxed{\tfrac{32\pi}{3}}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 7 (*10 Punkte*) Gegeben ist die komplexwertige Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}.$$

a) Bestimmen Sie die Pole von f.

$$z_{1/2/3} = i \quad z_{4/5/6} = -i$$

b) Berechnen Sie an jedem Pol das Residuum von f.

$$\mathrm{Res}(f; i) = \tfrac{-3i}{16} \quad \mathrm{Res}(f; -i) = \tfrac{3i}{16}$$

c) Sei K_r in der komplexen Zahlenebene der positiv orientierte Kreis um $-2i$ mit Radius r. Berechnen Sie

$$I_2 = \oint_{K_2} f(z)\,dz \quad \text{und } I_4 = \oint_{K_4} f(z)\,dz.$$

$$I_2 = \boxed{\tfrac{-3\pi}{8}} \qquad I_4 = \boxed{0}\,.$$

d) Für $R \geqq 3$ bezeichne in der oberen Halbebene H_R den Halbkreis um 0 vom Radius R, der von R nach $-R$ im positiven Sinn durchlaufen werde. Zeigen Sie:

$$\lim_{R \longrightarrow \infty} \int_{H_R} f(z)dz \ = \ 0.$$

$$\begin{aligned}
&\left|\lim_{R\to\infty} \int_{H_R} f(z)dz\right| \\
&\leqq \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} |f(Re^{it})Re^{it}|dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{R}{|(R^2e^{2it}+1)^3|}dt \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{R^5}dt = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^5}\pi \to 0
\end{aligned}$$

e) Bezeichne D_R den durch die Strecke von $-R$ nach R abgeschlossenen Halbkreis H_R, der positiv orientiert sei. Berechnen Sie für $R \geqq 3$

$$\oint_{D_R} f(z)dz = \boxed{\tfrac{3\pi}{8}}$$

f) Bestimmen Sie

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3}dx = \boxed{\tfrac{3\pi}{16}}$$

Aufgabe 8 (*7 Punkte*)

a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y'' - 3y' = 0.$$

$$y_{hom}(x) = \boxed{c_1 + c_2 e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.}$$

b) Wie lautet die Laplace-Transformierte mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 2$ und $y'(0) = 1$?

$$\mathcal{L}(u)(s) = \boxed{\frac{2s-5}{s^2-3s}}$$

c) Berechnen Sie eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 3y' = (2x+1)e^{3x}$$

und geben Sie alle Lösungen dieser Differentialgleichung an.

$$y(x) = \boxed{y_{hom} + \frac{1}{9}xe^{3x} + \frac{1}{3}x^2 e^{3x}}$$