Aufgabe 1 (*10 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1' &= 6x_1 + x_3 \\ x_2' &= 2x_2 \\ x_3' &= x_1 + 6x_3 \end{aligned}$$

c) Bestimmen Sie die spezielle Lösung des Differentialgleichungssystems aus b) zur Anfangsbedingung

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1.$$

d) Bestimmen Sie A^{100}.

Lösung:

(a) Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p(\lambda)$ mit

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (2-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 6-\lambda & 1 \\ 1 & 6-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)((6-\lambda)^2 - 1).$$

Die Eigenwerte sind damit $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 5,\ \lambda_3 = 7.$

Zugehörige Eigenvektoren v_j sind gegeben durch die nichttrivialen Lösungen der homogenen linearen Gleichungssysteme $(A - \lambda_j I)v = 0$.

- Zu $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{z.B. } v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Zu $\lambda_2 = 5$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{z.B. } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- Zu $\lambda_3 = 7$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{z.B. } v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Das Differentialgleichungssystem besitzt die Form $\dot{x} = Ax$ mit der Matrix A aus **a)**. Daher ist die allgemeine Lösung z.B. gegeben durch

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{5t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t}, \quad c_1,\, c_2,\, c_3 \in \mathbb{R}.$$

(c) Es soll $x(0) = (1,1,1)^\top$ sein, daher erhalten wir die c_j durch Auflösen des inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich unmittelbar $c_1 = 1,\ c_2 = 0,\ c_3 = 1$. Die gesuchte Lösung ist damit

$$x(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t}.$$

(d) Da $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ symmetrisch ist, existiert eine orthogonale Matrix S, so dass $A = SDS^\top$, mit $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Die Spalten der Matrix S bestehen aus den normierten Eigenvektoren. Damit ist

$$\begin{aligned}
A^{100} &= \underbrace{SD\,\overbrace{S^\top \cdot S}^{=I}\,D\,\overbrace{S^\top \cdot S}^{=I} \cdots \overbrace{S^\top \cdot S}^{=I}\,DS^\top}_{100-\text{mal}} = SD^{100}S^\top \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{100} & 0 & 0 \\ 0 & 5^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 7^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2^{100} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}5^{100} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}5^{100} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}7^{100} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}7^{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5^{100}+7^{100}}{2} & 0 & \frac{7^{100}-5^{100}}{2} \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ \frac{7^{100}-5^{100}}{2} & 0 & \frac{5^{100}+7^{100}}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (*10 Punkte*)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n^9)}{\sqrt{n}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+6}{6n^3+5n^2} \cdot \dfrac{12^n}{27^n}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{1+x}-e}{x\tanh(x+5)}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, wobei $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} - 1$ und $x_0 = 1$.

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{(k+1)!}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t^2)}{\sqrt{26+t^3}}\,\mathrm{d}t$

Lösung:

(a) Es ist

$$0 \xleftarrow{n\to\infty} -\frac{1}{\sqrt{n}} \leqq \frac{\sin(n^9)}{\sqrt{n}} \leqq \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Damit gilt nach dem Einschnürungssatz $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n^9)}{\sqrt{n}} = 0$.

(b)

$$\frac{n^3+6}{6n^3+5n^2} \cdot \frac{12^n}{27^n} = \underbrace{\frac{1+\frac{6}{n^3}}{6+\frac{5}{n}}}_{\to\frac{1}{6}} \cdot \underbrace{\left(\frac{4}{9}\right)^n}_{\to 0} \to 0 \text{ für } n\to\infty.$$

(c) Es ist mit den Regeln von de l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{1+x}-e}{x\tanh(x+5)} \overset{\text{„}\frac{0}{0}\text{“}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{1+x}}{\tanh(x+5) + \frac{x}{\cosh^2(x+5)}} = \frac{e}{\tanh(5)}.$$

(d) Sei x^* der Grenzwert der Folge. Dann muss gelten $x^* = \frac{x^*}{2} - 1$. Daraus ergibt sich dann sofort $x^* = -2$.

(e)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e - 1.$$

(f) Unter Verwendung der Regeln von de l'Hospital und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \frac{\sin(t^2)}{\sqrt{26+t^3}}\,\mathrm{d}t}{\sqrt{x}} \overset{\text{„}\frac{0}{0}\text{“}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(x^2)}{\sqrt{26+x^3}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sqrt{x}\sin(x^2)}{\sqrt{26+x^3}} = 0.$$

Aufgabe 3 (*10 Punkte*)

a) Bestimmen Sie unter Verwendung der Sinus-Reihe die Taylorreihe der Funktion $f(x) = x \sin x$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

b) Bestimmen Sie $f^{(10)}(0)$ und $f^{(2013)}(0)$.

c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Taylorreihe.

d) Ist $x = 0$ eine lokale Extremstelle? Wenn ja, handelt es sich bei dem Extremum um ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum?

e) Skizzieren Sie f für $x \in (-2\pi, 2\pi)$.

Lösung:

(a) Es ist

$$f(x) = x\sin(x) = x\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+2}.$$

(b) Die Taylorreihe von f ist allgemein gegeben durch $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$. Koeffizientenvergleich bei $x^{10} \stackrel{!}{=} x^{2k+2}$ liefert dann $k = 4$ und somit

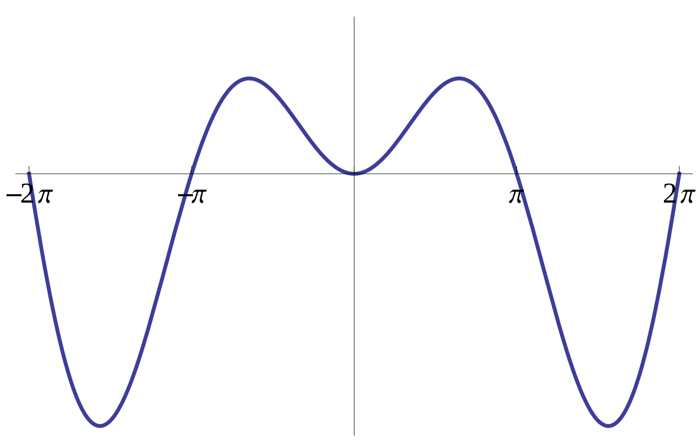
$$\frac{f^{(10)}(0)}{10!} = (-1)^4 \frac{1}{9!} \quad \Rightarrow \quad f^{(10)}(0) = \frac{10!}{9!} = 10.$$

Da $\frac{f^{(2013)}(0)}{2013!}$ der Koeffizient vor einer ungerade Potenz von x ist und nach **a)** die Taylorreihe von f aber nur gerade Potenzen von x enthält, folgern wir sofort, dass $f^{(2013)}(0) = 0$ ist.

(c) Der Konvergenzradius der Sinusreihe ist Unendlich. Multiplikation mit x ändert daran nichts, daher ist der Konvergenzradius der Taylorreihe aus **a)** ebenfalls Unendlich.

(d) Es ist $f'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$ und $f''(x) = 2\cos(x) - x\sin(x)$. Damit haben wir $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 2 > 0$. Somit muss bei $x = 0$ ein lokales Minimum vorliegen.

(e)



Aufgabe 4 (*10 Punkte*)

a) Konstruieren Sie für den Untervektorraum, der durch die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird, eine Orthonormalbasis und ergänzen Sie diese zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$.

b) Berechnen Sie den Radius und den Mittelpunkt der Sphäre

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 8x_3 + 16 = 0\}.$$

c) Bestimmen Sie den Abstand des Untervektorraumes aus a) und der Sphäre aus b).

Lösung:

(a) Wir verwenden das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt, um eine Orthonormalbasis $\{v_1, v_2\}$ von $\operatorname{span}\{a, b\}$ zu konstruieren. Es ist

$$v_1 = \frac{1}{\|a\|} a = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$w_2 = b - \langle b, v_1 \rangle v_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{1}{25} \cdot 50 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v_2 = \frac{1}{\|w_2\|} w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Den Vektor v_3, der $\{v_1, v_2\}$ zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ ergänzt, erhalten wir durch das Kreuzprodukt

$$v_3 = v_1 \times v_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Durch quadratisches Ergänzen erhalten wir

$$\begin{aligned} & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 8x_3 + 16 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x_1^2 - 2x_1 + 1 - 1 + x_2^2 + x_3^2 - 8x_3 + 16 - 16 + 16 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + (x_3 - 4)^2 = 1^2 \\ \Leftrightarrow\ & \|x - (1,0,4)^\top\| = 1. \end{aligned}$$

Man liest nun leicht den Mittelpunkt $M = (1,0,4)^\top$ und den Radius $r = 1$ ab.

(c) Der von a und b aufgespannte Unterraum ist eine Ebene E durch den Ursprung, mit dem Normalenvektor v_3. Sie besitzt daher die Hessesche Normalform

$$E\ :\ -\frac{3}{5}x_1 + \frac{4}{5}x_3 = 0.$$

Der Abstand von E zum Mittelpunkt M der Sphäre ist dann $d(E,M) = |-\frac{3}{5}\cdot 1 + \frac{4}{5}\cdot 4| = \frac{13}{5}$. Da der Radius der Sphäre kleiner ist als der Abstand von M zu E, erhalten wir den Abstand der Sphäre zu E durch $d(E,M) - r = \frac{8}{5}$.

Aufgabe 5 (*10 Punkte*)

a) Geben Sie für die nachfolgenden uneigentlichen Integrale jeweils an, ob diese konvergieren oder divergieren. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

i) $\displaystyle\int_0^2 \frac{e^{4x}-1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ ii) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)e^x}\mathrm{d}x$

b) Bestimmen Sie diejenige Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = x^2 - 3x + 2$$

mit $x(0) = \frac{3}{2}$.

Lösung:

(a) i) Es ist

$$\frac{e^{4x}-1}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(4x)^n - 1\right) = \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n!}x^{n-2} = \frac{4}{x} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^{k+2}}{(k+2)!}x^k}_{=:R(x)}.$$

Die Reihe $R(x)$ hat unendlichen Konvergenzradius (leicht mit dem Quotientenkriterium einzusehen), ist damit insbesondere auf $[0,2]$ stetig und somit Riemann-integrierbar. Daher ist

$$\int_0^2 \frac{e^{4x}-1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^2 \frac{4}{x}\,\mathrm{d}x}_{\text{divergent}} + \underbrace{\int_0^2 R(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{konvergent}},$$

also ist das fragliche Integral divergent.

ii) Der Integrand kann in folgender Weise abgeschätzt werden:

$$0 \leqq \frac{x^2}{(1+x^2)e^x} \leqq \frac{1}{e^x}.$$

Weiter haben wir $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{L\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_1^L = \lim_{L\to\infty}(e^{-1}-e^{-L}) = e^{-1} < \infty$. Daher folgt, dass das fragliche Integral nach dem Majorantenkriterium konvergiert.

(b) Es handelt sich hierbei um eine separierbare Differentialgleichung. Trennung der Veränderlichen führt dann auf

$$\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}t = t + c.$$

Mit einer Partialbruchzerlegung haben wir dann

$$\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \ln|x-2| - \ln|x-1| = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|.$$

Dies führt dann zur allgemeinen Lösung

$$\frac{x-2}{x-1} = ke^t \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{2 - ke^t}{1 - ke^t}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Die Anfangsbedingung $x(0) = \frac{3}{2}$ liefert schließlich $k = -1$, so dass die gesuchte Lösung gegeben ist durch

$$x(t) = \frac{2 + e^t}{1 + e^t}.$$

Aufgabe 6 (*10 Punkte*)

a) Bestimmen Sie diejenigen Punkte auf der Menge

$$M = \{(x, y) \mid x^2 + xy + y^2 = 1\},$$

welche vom Ursprung minimalen Abstand besitzen.

b) Berechnen Sie den Gradienten der Funktion

$$f(x, y) = ye^x - x^2e^y,$$

sowie die Gleichungen der Tangenten an die implizit definierte Kurve $C = \{(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$ in den Punkten $P_1(0, 0)$ und $P_2 = (1, 1)$.

Lösung:

(a) Der Abstand eines Punktes (x, y) zum Ursprung ist gegeben durch $\sqrt{x^2 + y^2}$. Dieser Ausdruck wird wegen der Monotonie der Wurzelfunktion genau dann minimal, wenn x^2+y^2 minimal wird. D.h. wir erhalten das folgende Optimierungsproblem:

$$\text{Minimiere } x^2 + y^2 \text{ unter der Nebenbedingung } x^2 + xy + y^2 = 1.$$

Das zugehörige Lagrangefunktional ist gegeben durch $H(x, y, \lambda) = x^2+y^2+\lambda(x^2+xy+y^2-1)$. Die notwendigen Bedingungen für ein Extremum sind

$$\begin{aligned} \partial_x H &= 2x + (2x + y)\lambda \overset{!}{=} 0, \\ \partial_y H &= 2y + (x + 2y)\lambda \overset{!}{=} 0, \\ \partial_\lambda H &= x^2 + xy + y^2 - 1 \overset{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Die Bedingung $0 = \partial_x H - \partial_y H = 2(x - y) + (x - y)\lambda = (x - y)(2 + \lambda)$ führt auf die zwei Fälle $x = y$ und $\lambda = -2$.

- Fall $x = y$:

  Dann wird $\partial_\lambda H = 0$ zu $3x^2 = 1$, also $x = y = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

- Fall $\lambda = -2$:

  Eingesetzt in $\partial_x H = 0$ haben wir dann $-2x - 2y = 0$, was genau dann der Fall ist, wenn $x = -y$. In die Bedingung $\partial_\lambda H = 0$ eingesetzt liefert dies $x^2 = 1$, also $x = \pm 1$ und $y = \mp 1$.

Die kritischen Punkte sind also $S_{1/2}(\pm 1, \mp 1)$ und $S_{3/4}(\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}, \pm\frac{1}{3}\sqrt{3})$. Den kleinsten Abstand zum Ursprung haben offensichtlich die Punkte S_3 und S_4.

(b) Es ist

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (ye^x - 2xe^y, e^x - x^2e^y).$$

Damit ist $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,1)$ und $\operatorname{grad} f(1,1) = (-e,0)$. Da der Gradient immer senkrecht auf den Niveaulinien steht, haben wir damit als Tangentengleichungen

$$t_1 \,:\, x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t_2 \,:\, x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

mit $r,\, s \in \mathbb{R}$.