Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (*1 Punkt*)

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Fachrichtung: Musterlösung

Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bei allen Aufgaben sind **begründete Antworten** verlangt.
  Sie können diese direkt auf das Aufgabenblatt schreiben.
- Die Aufgaben sind nach Themen gruppiert. Die Notenskala wird so berechnet, dass Sie eine Aufgabe als **optional** betrachten (und eventuell weglassen) können.
- Die Aufgaben sind untereinander **unabhängig**. Innerhalb einer Aufgabe sind die Fragen oft voneinander unabhängig. (Tipp: Verbeißen Sie sich nicht zu lange in eine Frage.)
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/12	/11	/11	/12	/11	/12	/70

Nützliche Werte

Tabelle der Exponentialfunktion $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ für ausgewählte Werte von x:

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
e^x	1.11	1.22	1.35	1.49	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72	3.00	3.32	3.67	4.06	4.48	4.95	5.47	6.05	6.69	7.39
e^{-x}	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368	.333	.301	.273	.247	.223	.202	.183	.165	.150	.135

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-t^2/2}$:

	x+0.00	x+0.01	x+0.02	x+0.03	x+0.04	x+0.05	x+0.06	x+0.07	x+0.08	x+0.09
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41308	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.49506$.

Aufgabe 2. *Verständnisfragen* (*2+2+2+2+2+2 = 12 Punkte*)

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegenbeispiels).

Frage 2A. Gilt $\int_0^1 f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ für alle stetigen Funktionen f, g?

Begründete Antwort: ▶ Nein. (Das Integral ist additiv aber nicht multiplikativ.)
▶ Ein Gegenbeispiel ist $f(x) = g(x) = x$. (Man findet links $1/3$ und rechts $1/4$.)

Frage 2B. Sei $K \subset \mathbb{C}$ ein Kompaktum mit stückweise glattem Rand $\partial K \subset \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$. Welche Werte kann das komplexe Wegintegral $\int_{\partial K} z^{-1}\,\mathrm{d}z$ annehmen?

Begründete Antwort: ▶▶ Nur die Werte 0 und $2\pi\mathrm{i}$ nach dem Residuensatz.
(Und zwar gilt $\int_{\partial K} z^{-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}$ falls $0 \in K$, und $\int_{\partial K} z^{-1}\,\mathrm{d}z = 0$ sonst.)

Frage 2C. Sie würfeln n–mal unabhängig mit einem fairen sechsseitigen Würfel. Sei X_k die Augenzahl im k–ten Wurf und $M_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ der empirische Mittelwert der ersten n Würfe. Welchen Wert erhält man als Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(M_n < 4)$?

Begründete Antwort: ▶▶ Es gilt $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(M_n < 4) = 1$ nach dem Gesetz der großen Zahlen.

(Es gilt $\mathbf{E}(X_k) = 3.5$ und $\mathbf{V}(X_k) = \sigma^2 < \infty$, und somit $\mathbf{E}(M_n) = 3.5$ und $\mathbf{V}(M_n) = \sigma^2/n$. Dank Chebychev gilt $\mathbf{P}(M_n \ge 4) = \mathbf{P}(M_n - 3.5 \ge 0.5) \le 1/(1 + n/4\sigma^2) \to 0$, also $\mathbf{P}(M_n < 4) \to 1$.)

Frage 2D. Sei $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig und $u, v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar mit $u(0) = v(0)$ sowie $u'(x) = A(x)\, u(x)$ und $v'(x) = A(x)\, v(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Folgt hieraus $u = v$?

Begründete Antwort: ►► Ja, dank Eindeutigkeitssatz für lineare Differentialgleichungssysteme.

(Diese grundlegende Eigenschaft haben wir zur Lösung jedes DGSystems $u' = Au$ genutzt: Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ zu jedem Startwert $u(x_0)$ garantieren uns, dass der Lösungsraum n–dimensional ist. Hierzu genügt, dass $A(x)$ stetig ist.)

Frage 2E. Ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \cos(kx)$ die Fourier–Reihe einer quadrat–integrierbaren Funktion?

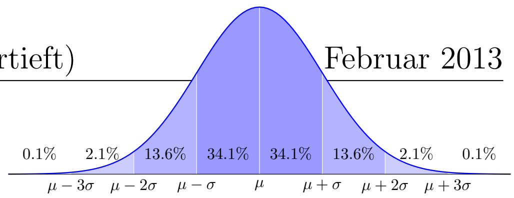
Begründete Antwort: ►► Nein, denn die Koeffizienten sind nicht quadrat–summierbar.

(Ist f quadrat–integrierbar, $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x < \infty$, so ist die Fourier–Reihe $f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ quadrat–summierbar, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$. In unserem Beispiel gilt aber $\sum_{k=1}^{\infty} \big(\frac{1}{\sqrt{k}}\big)^2 = \infty$.)

Frage 2F. Gilt für alle Polynome $P(x, y), Q(x, y)$ die Vertauschbarkeit

$$\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{1} \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \quad ?$$

Begründete Antwort:
►► Nein. Der Satz von Fubini verlangt absolute Integrierbarkeit des Integranden, andernfalls existieren Gegenbeispiele (etwa $(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2$ wie in der Übung).



Aufgabe 3. *Wahrscheinlichkeit (3+4+4 = 11 Punkte)*

Frage 3A. Zu zwei Ereignissen A und B sind folgende Wahrscheinlichkeiten gegeben:

$$\mathbf{P}(\overline{A}) = 0.8, \quad \mathbf{P}(A \cup B) = 0.6, \quad \mathbf{P}(A \cap B) = 0.1.$$

Berechnen Sie hieraus $\mathbf{P}(A)$ und $\mathbf{P}(B)$. Sind A und B stochastisch unabhängig?

Rechnung & Antwort:

▶ Aus $\mathbf{P}(\overline{A}) = 0.8$ folgt $\mathbf{P}(A) = 0.2$.

▶ Aus $\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A \cup B) + \mathbf{P}(A \cap B)$ folgt $\mathbf{P}(B) = 0.5$.

▶ Es gilt $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$, also sind A und B stochastisch unabhängig.

Frage 3B. Ein Zufallsexperiment mit Trefferwahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}$ wird 2500 mal unabhängig wiederholt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit P ergeben sich mindestens 470 und höchstens 530 Treffer? Berechnen Sie mit Hilfe der Normalverteilung den Wert in Prozent auf 1% gerundet.

Rechnung & Antwort:

▶▶ Erwartungswert $\mu = 2500 \cdot \frac{1}{5} = 500$, Varianz $\sigma^2 = 2500 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = 400$, Streuung $\sigma = 20$.

▶▶ Zwischen 470 und 530 Treffer bedeutet Abweichung von -1.5σ bis 1.5σ vom Mittelwert. Etwas genauer ist $\alpha = (470 - \mu - 1/2)/\sigma = -1.525$ und $\beta = (530 - \mu + 1/2)/\sigma = 1.525$. Wir suchen also $P = \int_{-1.525}^{1.525} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{1.525} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$. Je nach verwendeter Rundung liegt der abgelesene Wert zwischen 0.433 und 0.437, also die Näherung für P zwischen 0.866 und 0.874. Somit erhält man $P \approx 87\%$.

Frage 3C. Bei einem Chip mit zwei Millionen Transistoren fällt jeder mit Wahrscheinlichkeit 10^{-6} unabhängig von allen anderen aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit A fallen höchstens 2 Transistoren aus? Berechnen Sie den Wert in Prozent auf 1% gerundet. (Zur Näherung können Sie $\mathrm{e}^{-2} = 0.1353\ldots$ nutzen. Eine Fehlerabschätzung wird nicht verlangt.)

Rechnung & Antwort:

▶ Eine sehr gute Näherung ist die Poisson–Verteilung $P(\lambda)(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$.

▶ Bei $n = 2 \cdot 10^6$ Versuchen mit Wahrscheinlichkeit $p = 10^{-6}$ gilt $\lambda = np = 2$.

▶▶ Die Wahrscheinlichkeit für höchstens zwei Ausfälle ist demnach

$$A = \Big(\frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!}\Big)\mathrm{e}^{-2} = \Big(\frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{4}{2}\Big)\mathrm{e}^{-2} = 5\mathrm{e}^{-2} \approx 0.676\cdots \approx 68\%$$

Aufgabe 4. *Differentialgleichungen (2+3+3+3 = 11 Punkte)*

Lösen Sie folgende Differentialgleichungen für reelle Funktionen $u, v, w, y \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Die Gleichungen sind untereinander eng verwandt, das können und sollen Sie ausnutzen.

Frage 4A. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $u''(x) + u'(x) - 2u(x) = 0$.

Rechnung:

Das charakteristische Polynom $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$ hat Nullstellen $x = 1$ und $x = -2$.
Ein Fundamentalsystem dieser Gleichung ist demnach ▶ $u_1(x) = \mathrm{e}^x$ und ▶ $u_2 = \mathrm{e}^{-2x}$.

Allgemeine Lösung $u(x) =$ $c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-2x}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Frage 4B. Bestimmen Sie eine Partikulärlösung von $v''(x) + v'(x) - 2v(x) = \mathrm{e}^x$.

Ansatz & Rechnung:

▶ Es liegt (einfache) Resonanz vor, also machen wir den Ansatz $v(x) = cx\mathrm{e}^x$ mit $c \in \mathbb{R}$.
▶ Ableiten $v'(x) = c\mathrm{e}^x + cx\mathrm{e}^x$ und $v''(x) = 2c\mathrm{e}^x + cx\mathrm{e}^x$ ergibt $v''(x) + v'(x) - 2v(x) = 3c\mathrm{e}^x \stackrel{!}{=} \mathrm{e}^x$.
▶ Der Ansatz löst die Gleichung für $c = 1/3$. Wir erhalten die Lösung $v(x) = \frac{1}{3}x\mathrm{e}^x$. (Probe!)

Partikulärlösung $v(x) =$ $\dfrac{1}{3}x\mathrm{e}^x$

Frage 4C. Bestimmen Sie eine Partikulärlösung von $w''(x) + w'(x) - 2w(x) = \cos(x)$.

Ansatz & Rechnung: Für die rechte Seite $\cos x = \operatorname{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})$ liegt keine Resonanz vor.

▶ Wir machen daher den Ansatz $w(x) = a\cos x + b\sin x$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

▶ Ableiten $w'(x) = -a\sin x + b\cos x$ und $w''(x) = -a\cos x - b\sin x$ und Einsetzen führt zu der Gleichung $w''(x) + w'(x) - 2w'(x) = (b - 3a)\cos x - (a + 3b)\sin x \stackrel{!}{=} \cos x$.

▶ Koeffizientenvergleich $b - 3a \stackrel{!}{=} 1$ und $a + 3b \stackrel{!}{=} 0$ ergibt $b = 1/10$ und $a = -3/10$.
Wir erhalten somit die Lösung $w(x) = -\frac{3}{10}\cos(x) + \frac{1}{10}\sin(x)$. (Probe!)

Alternativ führt auch der ▶ komplexe Ansatz $w(x) = c\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ mit $c \in \mathbb{C}$ zum Ziel:

▶ Ableiten $w'(x) = c\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ und $w''(x) = -c\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ ergibt $w''(x) + w'(x) - 2w'(x) = c(\mathrm{i} - 3)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \stackrel{!}{=} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$.
Für die Konstante c finden wir somit $c = (\mathrm{i} - 3)^{-1} = (-3 - \mathrm{i})/10$. Ausgeschrieben bedeutet das

$$w(x) = \frac{-3 - \mathrm{i}}{10}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \left(-\frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x\right) - \mathrm{i}\left(\frac{1}{10}\cos x + \frac{3}{10}\sin x\right)$$

▶ Der Realteil $-\frac{3}{10}\cos(x) + \frac{1}{10}\sin(x)$ ist die gesuchte reelle Lösung. (Probe!)

Partikulärlösung $w(x) = \dfrac{1}{10}\sin(x) - \dfrac{3}{10}\cos(x)$

Frage 4D. Lösen Sie $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 3\mathrm{e}^x + 10\cos(x)$ mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 2$.

Ansatz & Rechnung:

▶ Die allgemeine Lösung entnehmen wir als Linearkombination den vorigen Antworten:

$$y(x) = u(x) + 3w(x) + 10v(x) = c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-2x} + x\mathrm{e}^x + \sin(x) - 3\cos(x)$$

▶ Ableiten $y'(x) = c_1\mathrm{e}^x - 2c_2\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x + \cos(x) + 3\sin(x)$ und Einsetzen führt zu den Gleichungen $y(0) = c_1 + c_2 - 3 \stackrel{!}{=} 0$ und $y'(0) = c_1 - 2c_2 + 2 \stackrel{!}{=} 2$.

▶ Die gesuchten Konstanten sind demnach $c_1 = 2$ und $c_2 = 1$.

Lösung $y(x) = (x + 2)\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-2x} + \sin(x) - 3\cos(x)$

Aufgabe 5. *Differentialgleichungssysteme (4+1+4+3 = 12 Punkte)*

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem $y'(t) = A\,y(t)$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Frage 5A. Berechnen Sie $u = Av$ und Au sowie Aw. Bestimmen Sie hieraus eine Basis des $\mathbb{C}^4$ bestehend aus einer Hauptvektorkette der Länge 2 und zwei Eigenvektoren von A.

Rechnung & Antwort:

▶ Die vorgeschlagene Rechnung ergibt die Vektoren $Av = u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $Au = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Somit ist v ein Hauptvektor 2. Stufe zum Eigenwert 0.

▶ Weiters finden wir $Aw = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathrm{i}w$. Somit ist w ein Eigenvektor zum Eigenwert i.

▶ Da die Matrix A reell ist, ist $\overline{w}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $-\mathrm{i}$.

▶ Damit haben wir die Basis $u, v, w, \overline{w}$ gefunden, wie gewünscht.
(Die lineare Unabhängigkeit folgt aus der Verschiedenheit der Eigenwerte.)

(Alternativ kann man den langen Weg gehen: charakteristisches Polynom, Eigenwerte, Eigen- und Hauptvektoren ausrechnen. Das ist nötig, wenn man außer der Matrix nichts weiß. Hier hingegen ist es effizienter, die gegebenen Daten anzuschauen und auszunutzen.)

Frage 5B. Wie lautet demnach das charakteristische Polynom von A? (in faktorisierter Form)

Antwort: ▶ Aus den Eigenwerten $0, 0, \mathrm{i}, -\mathrm{i}$ erhalten wir das charakteristische Polynom

$$(x-0)(x-0)(x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i}) = x^4 + x^2.$$

(Alternativ kann man $\det(A - xE)$ entwickeln. Das geht hier zum Glück dank vieler Nullen, versuchen Sie es! Es ist aber bequemer, die Eigenwerte aus der vorigen Aufgabe abzulesen.)

Frage 5C. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem $y_1, y_2, y_3, y_4 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ der Differentialgleichung $y' = A\,y$ mit Anfangswerten $y_1(0) = u$, $y_2(0) = v$, $y_3(0) = (1,0,0,0)$, $y_4(0) = (0,0,0,1)$.

Antwort: Nach obiger Vorarbeit können wir direkt unsere Lösungsformeln einsetzen:

►► Wir erhalten $y_1(t) = \mathrm{e}^{0t} u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $y_2(t) = \mathrm{e}^{0t}(v + tu) = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1 \\ 1+t \\ -1-t \end{pmatrix}$.

Aus den komplexen Lösungen $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} w = \begin{pmatrix} \cos t + \mathrm{i}\sin t \\ 0 \\ 0 \\ -\sin t + \mathrm{i}\cos t \end{pmatrix}$ und $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\overline{w} = \begin{pmatrix} \cos t - \mathrm{i}\sin t \\ 0 \\ 0 \\ -\sin t - \mathrm{i}\cos t \end{pmatrix}$

erhalten wir Real- und Imaginärteil durch die Linearkombinationen

►► $y_3(t) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} w + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\overline{w}\right] = \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ 0 \\ -\sin t \end{pmatrix}$ und $y_4(t) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} w - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\overline{w}\right] = \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix}$.

Diese Lösungen $y_1, y_2, y_3, y_4 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ erfüllen die gewünschten Anfangsbedingungen. (Probe!)

Frage 5D. Wenn Sie zufällig (stetig verteilt) einen Startvektor $y(0) \in \mathbb{R}^4$ wählen und die zugehörige Lösung von $y'(t) = A\,y(t)$ verfolgen, welchen Grenzwert $\lim_{t\to\infty} |y(t)|$ erwarten Sie?

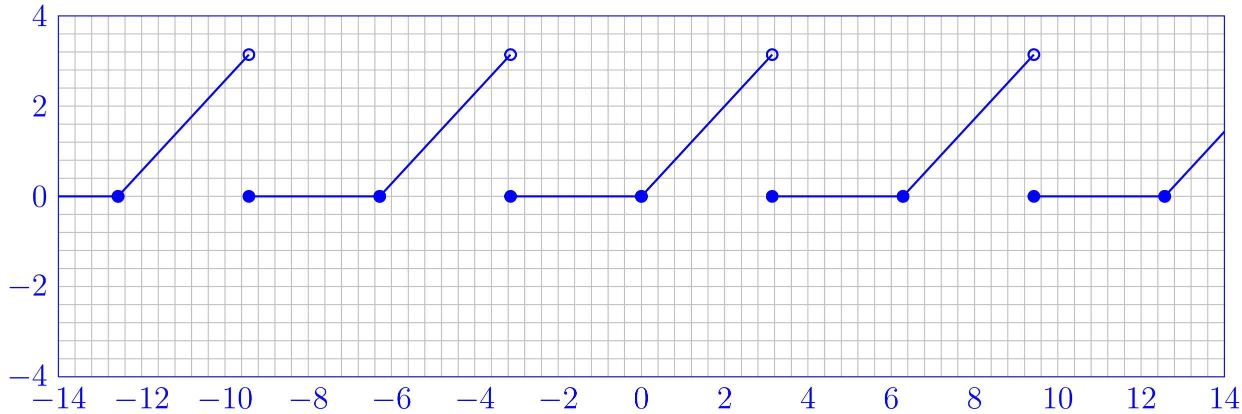
Antwort: ► Die Lösungen y_1, y_3, y_4 sind beschränkt, hingegen gilt $|y_2(t)| \to \infty$ für $t \to \infty$. Jede Lösung hat die Form $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + c_3 y_3(t) + c_4 y_4(t)$ mit $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$. ► Im Falle $c_2 \neq 0$ gilt $|y(t)| \to \infty$ für $t \to \infty$. ► Bei zufälliger Wahl des Startwerts $y(0)$ sind mit Wahrscheinlichkeit 1 alle Koeffizienten c_1, c_2, c_3, c_4 ungleich Null, also $|y(t)| \to \infty$ für $t \to \infty$.

(Für $y'(t) = A\,y(t)$ ist der Startwert 0 ein Fixpunkt. Dieser Fixpunkt ist jedoch nicht stabil, denn eine kleine Abweichung wird im Laufe der Zeit immer größer und führt von 0 weg.)

Aufgabe 6. *Fourier–Reihen* (*1+6+2+2 = 11 Punkte*)

Frage 6A. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2π–periodisch mit $f(x) = 0$ für $-\pi \le x \le 0$ und $f(x) = x$ für $0 < x < \pi$. Skizzieren Sie f auf dem Intervall $[-4\pi, 4\pi]$.

Skizze: ▶ Der Graph der Funktion f sieht so aus:



Frage 6B. Berechnen Sie die Koeffizienten der komplexen Fourier–Reihe $f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ sowie die der reellen Fourier–Reihe $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$.

Rechnung & Antwort: ▶ Für $k = 0$ erhalten wir

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4\pi}\Big[x^2\Big]_0^{\pi} = \frac{\pi}{4}.$$

▶▶▶ Für $k \ne 0$ erhalten wir mit partieller Integration

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\Big[\frac{\mathrm{i}}{k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} x\Big]_0^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{i}}{k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{(-1)^k\mathrm{i}}{2k} + \frac{1}{2\pi k^2}\Big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\Big]_0^{\pi} = \frac{(-1)^k\mathrm{i}}{2k} + \frac{(-1)^k - 1}{2\pi k^2} = \begin{cases} \frac{(-1)^k\mathrm{i}}{2k} & \text{für } k \text{ gerade,} \\ \frac{(-1)^k\mathrm{i}}{2k} - \frac{1}{\pi k^2} & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

▶▶ Für die Koeffizienten der reellen Fourier–Reihe leiten wir hieraus ab:

$$a_0 = 2c_0 = \frac{\pi}{2}, \quad a_k = c_k + c_{k-1} = \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}, \quad b_k = \mathrm{i}(c_k - c_{-k}) = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Ausgeschrieben bedeutet das:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}\cos(kx) + \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx) \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2}\cos\big((2j+1)x\big) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx) \end{aligned}$$

Frage 6C. Bestimmen Sie für jedes $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert dieser Fourier–Reihe.

Begründete Antwort: ▶ Die Funktion f ist in jedem Punkt x rechts- und linksseitig stetig sowie rechts- und linksseitig differenzierbar. Nach dem Satz von Dirichlet konvergiert ihre Fourier–Reihe gegen den Mittelwert $\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$. ▶ In jedem Punkt $-\pi < x < \pi$ ist f stetig und somit der Mittelwert gleich $f(x)$. In der Sprungstelle $x = \pi$ ist dieser Mittelwert $\pi/2$.

Frage 6D. Bestimmen Sie durch Auswertung dieser Reihe an einer geeigneten Stelle den Wert

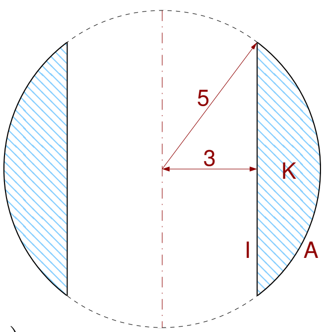
$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

Rechnung & Antwort: ▶ Wir werten die obige Fourier–Reihe in $x = \pi$ aus und erhalten

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2}.$$

▶ Hieraus folgt durch einfache Umstellung die Gleichung

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$



Aufgabe 7. *Integration und Integralsätze (3+3+3+3 = 12 Punkte)*

Der Körper $K := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 25,\ x^2 + y^2 \ge 9 \}$ entsteht aus einer Kugel vom Radius 5 indem man mittig einen Zylinder vom Radius 3 ausbohrt. Er hat eine Innenwand I (mit $x^2 + y^2 = 9$) und eine Außenwand A (mit $x^2 + y^2 + z^2 = 25$). Zudem sei $f(x,y,z) = (x,y,z)$.

Frage 7A: Parametrisieren Sie K in Zylinderkoordinaten $\Phi(r,\varphi,z) = (\ r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z\ )$:

$\boxed{-4} \le z \le \boxed{4}$, $\boxed{3} \le r \le \boxed{\sqrt{25 - z^2}}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$

Frage 7B: Berechnen Sie die Quellstärke von f auf K, also das Volumenintegral der Divergenz.

Rechnung: Die Funktionaldeterminante $|\det \partial\Phi/\partial(r,\varphi,z)| = r$ entnehmen wir der Vorlesung. ▶▶▶ Das Volumenintegral von $\operatorname{div}(f) = 3$ über K ergibt demnach

$$\begin{aligned}&\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=-4}^{4}\int_{r=3}^{\sqrt{25-z^2}} 3r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\int_{z=-4}^{4}\int_{r=3}^{\sqrt{25-z^2}} 3r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z = 3\pi\int_{z=-4}^{4}\Big[r^2\Big]_{r=3}^{\sqrt{25-z^2}}\mathrm{d}z\\ &= 3\pi\int_{z=-4}^{4} 16 - z^2\,\mathrm{d}z = 3\pi\Big[16z - \frac{1}{3}z^3\Big]_{z=-4}^{4} = 3\pi\Big[128 - \frac{1}{3}128\Big] = 256\pi.\end{aligned}$$

Frage 7C: Berechnen Sie das Flussintegral von f durch die Innenwand I in K hinein.

Rechnung: Für die Innenwand I gilt $r = 3$, dieses Flächenstück wird demnach parametrisiert durch $\Psi(\varphi,z) = \Phi(3,\varphi,z) = (3\cos\varphi, 3\sin\varphi, z)$ mit $0 \le \varphi \le 2\pi$ und $-4 \le z \le 4$. ▶ Als in K weisenden Normalenvektor erhalten wir hieraus

$$n_I(\varphi,z) = \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\Psi}{\partial z} = (-3\sin\varphi, 3\cos\varphi, 0)\times(0,0,1) = (3\cos\varphi, 3\sin\varphi, 0).$$

Das entspricht der Anschauung! ▶▶ Für das Flussintegral durch die Innenwand I gilt demnach

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=-4}^{4}\Big\langle f(3\cos\varphi, 3\sin\varphi, z)\;\Big|\; n_I(\varphi,z)\Big\rangle\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=-4}^{4} 9\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi = 144\pi.$$

Frage 7D: Berechnen Sie das Flussintegral von f durch die Außenwand A aus K heraus.

Rechnung: Am bequemsten mit dem Satz von Gauß: $144\pi + 256\pi = 400\pi$. Oder mühsam durch Integration: Für die Außenwand A gilt $r(z) = \sqrt{25-z^2}$, sie wird demnach parametrisiert durch $\Psi(\varphi,z) = \Phi(r(z),\varphi,z) = (\sqrt{25-z^2}\cos\varphi, \sqrt{25-z^2}\sin\varphi, z)$ mit $0 \le \varphi \le 2\pi$ und $-4 \le z \le 4$. Es gilt $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z} = -z/\sqrt{25-z^2} = -z/r$. ▶ Als aus K weisenden Normalenvektor erhalten wir

$$n_A(\varphi,z) = \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\Psi}{\partial z} = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0)\times(-\tfrac{z}{r}\cos\varphi, -\tfrac{z}{r}\sin\varphi, 1) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z).$$

Das entspricht der Anschauung! ▶▶ Für das Flussintegral durch die Außenwand A gilt demnach

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=-4}^{4}\Big\langle f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\;\Big|\; n_A(\varphi,z)\Big\rangle\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=-4}^{4} 25\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi = 400\pi.$$