Lösungsvorschläge zur Klausur

für bau, ernen, fmt, IuI, mach, tema, umw, verf, geod und so weiter ;)

Aufgabe 1: *(10 Punkte)*
Im $\mathbb{R}^3$ wird eine Fläche T durch die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : [0, \tfrac{3\pi}{2}] \times [0, \tfrac{3\pi}{2}] &\to \mathbb{R}^3 \\ (s,t) &\mapsto \begin{pmatrix} (3+\cos(t))\cos(s) \\ (3+\cos(t))\sin(s) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

parametrisiert. Berechnen Sie die Zirkulation des Vektorfeldes

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -xz \end{pmatrix} \end{aligned}$$

entlang der Randkurve von T.

Lösungsvorschlag: Bei der Zirkulation von f entlang der Randkurve von T handelt es sich um das Kurvenintegral

$$\int_{\partial T} f(u) \cdot \mathrm{d}u \,,$$

wobei für die Randkurve eine Orientierung gewählt werden muss, wodurch das Ergebnis nur bis auf Vorzeichen eindeutig bestimmt ist. Sei $Q := [0, \frac{3\pi}{2}] \times [0, \frac{3\pi}{2}]$. Nach dem Satz von Stokes gilt

$$\int_{\partial T} f(u) \cdot \mathrm{d}u = \iint_T (\operatorname{rot} f) \cdot n \,\mathrm{d}O \,,$$

wobei hier die Orientierung der Randkurve ∂T verträglich sein muss mit der Einheitsnormalen n. Da das Ergebnis aber nur ohnehin bis auf Vorzeichen eindeutig ist, müssen wir uns im die im Satz von Stokes geforderte kompatible Orietierung keine Gedanken machen und werden im Folgenden einfach beide Seite als gleichwertige Lösungswege berechnen.

Lösungsweg 1: Es ist das Integral

$$\iint_T (\operatorname{rot} f) \cdot n \,\mathrm{d}O \,,$$

wobei n eine Einheitsnormale an T ist, zu berechnen. Eine Einheitsnormale n an T ist gegeben durch

$$n := n(s,t) := \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t}}{\left|\frac{\partial \Phi}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|} \,.$$

Wir werden unten sehen, dass sich der Betrag $|\frac{\partial\Phi}{\partial s}\times\frac{\partial\Phi}{\partial t}|$ im zu berechnenden Integral rauskürzt, sodass man nicht notwendig eine Einheitsnormale bestimmen muss. Es ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial s}\times\frac{\partial\Phi}{\partial t} &= \begin{pmatrix} -(3+\cos(t))\sin(s) \\ (3+\cos(t))\cos(s) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin(t)\cos(s) \\ -\sin(t)\sin(s) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (3+\cos(t))\cos(s)\cos(t) \\ (3+\cos(t))\sin(s)\cos(t) \\ (3+\cos(t))\sin(s)\sin(t)\sin(s)+\sin(t)\cos(s)(3+\cos(t))\cos(s) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (3+\cos(t))\cos(s)\cos(t) \\ (3+\cos(t))\sin(s)\cos(t) \\ (3+\cos(t))\sin^2(s)\sin(t)+(3+\cos(t))\sin(t)\cos^2(s) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (3+\cos(t))\cos(s)\cos(t) \\ (3+\cos(t))\sin(s)\cos(t) \\ (3+\cos(t))\sin(t) \end{pmatrix} = (3+\cos(t))\begin{pmatrix} \cos(s)\cos(t) \\ \sin(s)\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Der Betrag dieses Vektors ist $3+\cos(t)$ und daher erhalten wir

$$n = \begin{pmatrix} \cos(s)\cos(t) \\ \sin(s)\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} .$$

Es ist

$$\operatorname{rot} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-(-z) \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

wobei $f_1,\dots,f_3$ die Komponentenfunktionen von f sind. In den Koordinaten von Φ ist also

$$(\operatorname{rot} f)\circ\Phi(s,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

und daher

$$((\operatorname{rot} f)\circ\Phi(s,t))\cdot n(s,t) = \sin(t)\sin(s)\cos(t) .$$

Für das Oberflächenintegral erhalten wir nun unter Berücksichtigung von 2.2.2 im HM-Skript

$$\begin{aligned}
&\int_T (\operatorname{rot} f)\cdot n \,\mathrm{d}O = \int_Q ((\operatorname{rot} f)\circ\Phi)\cdot n \,|\frac{\partial\Phi}{\partial s}\times\frac{\partial\Phi}{\partial t}| \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&= \int_T (\operatorname{rot} f)\cdot n \,\mathrm{d}O = \int_Q ((\operatorname{rot} f)\circ\Phi)\cdot \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial s}\times\frac{\partial\Phi}{\partial t}}{|\frac{\partial\Phi}{\partial s}\times\frac{\partial\Phi}{\partial t}|}\,|\frac{\partial\Phi}{\partial s}\times\frac{\partial\Phi}{\partial t}| \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{s=0}^{\frac{3\pi}{2}}\int_{t=0}^{\frac{3\pi}{2}} (\sin(t)\sin(s)\cos(t))\,(3+\cos(t)) \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{s=0}^{\frac{3\pi}{2}}\int_{t=0}^{\frac{3\pi}{2}} 3\sin(t)\sin(s)\cos(t)+\sin(t)\sin(s)\cos(t)^2 \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Mittels partieller Integration bestimmt man folgende Stammfunktionen

$$\int \cos(\theta)\sin(\theta)\ \mathrm{d}\theta = -\frac{1}{2}\cos(\theta)^2\ ,$$

$$\int \sin(\theta)\cos(\theta)^2\ \mathrm{d}\theta = -\frac{1}{3}\cos(\theta)^3\ ,$$

Damit sehen wir, dass

$$\int_{t=0}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(t)\sin(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ ,$$

$$\int_{t=0}^{\frac{3\pi}{2}} \sin(t)\cos(t)^2\ \mathrm{d}t = \frac{1}{3}\ ,$$

und daher

$$\int_{s=0}^{\frac{3\pi}{2}}\int_{t=0}^{\frac{3\pi}{2}} 3\sin(t)\sin(s)\cos(t)\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}t = 3\frac{1}{2}\int_{s=0}^{\frac{3\pi}{2}} \sin(s)\ \mathrm{d}s = \frac{3}{2}\ ,$$

$$\int_{s=0}^{\frac{3\pi}{2}}\int_{t=0}^{\frac{3\pi}{2}} \sin(t)\sin(s)\cos(t)^2\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_{s=0}^{\frac{3\pi}{2}} \sin(s)\ \mathrm{d}s = \frac{1}{3}\ .$$

Wir erhalten nun

$$\int_T (\mathrm{rot}\ f)\cdot n\ \mathrm{d}O = \frac{3}{2}+\frac{1}{3} = \frac{11}{6}\ .$$

Lösungsweg 2: Es ist das Integral

$$\int_{\partial T} f(u)\cdot \mathrm{d}u$$

zu berechnen. Die Randkurve ∂T is durch die Einschränkung von Φ auf das Quadrat ∂Q parametrisiert. Wir durchlaufen ∂Q gegen den Uhrzeigersinn und parametrisieren die vier Seiten des Quadrats einzeln wie folgt:

$$K_1 : [0,\frac{3\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2, \quad s \mapsto \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}\ ,$$

$$K_2 : [0,\frac{3\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{3\pi}{2} \\ t \end{pmatrix}\ ,$$

$$K_3 : [0,\frac{3\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2, \quad s \mapsto \begin{pmatrix} \frac{3\pi}{2}-s \\ \frac{3\pi}{2} \end{pmatrix}\ ,$$

$$K_4 : [0,\frac{3\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3\pi}{2}-t \end{pmatrix}\ .$$

Für die Parametrisierung des Quadrats gibt es einen Punkt.
Es gilt dann (siehe auch 2.2.2 im HM-Skript)

$$\int_{\partial T} f(u)\cdot \mathrm{d}u = \sum_{i=1}^{4}\int_0^{\frac{3\pi}{2}} f\circ\Phi\circ K_i(u)\cdot(\Phi\circ K_i)'(u)\ \mathrm{d}u\ .$$

Es ist

$$f \circ \Phi \circ K_1(s) = f\begin{pmatrix} 4\cos(s) \\ 4\sin(s) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und daher ist das Integral über K_1 gleich 0.
Es ist

$$f \circ \Phi \circ K_2(t) = f\begin{pmatrix} 0 \\ -3-\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und daher ist auch das Integral über K_2 gleich 0.
Es ist

$$f \circ \Phi \circ K_3(s) = f\begin{pmatrix} 3\cos(\frac{3\pi}{2}-s) \\ 3\sin(\frac{3\pi}{2}-s) \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3\cos(\frac{3\pi}{2}-s) \end{pmatrix} ,$$

$$(\Phi \circ K_3)'(s) = \begin{pmatrix} 3\cos(\frac{3\pi}{2}-s) \\ 3\sin(\frac{3\pi}{2}-s) \\ -1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3\sin(\frac{3\pi}{2}-s) \\ -3\cos(\frac{3\pi}{2}-s) \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

und daher ist auch das Integral über K_3 gleich 0.
Es ist

$$f \circ \Phi \circ K_4(t) = f\begin{pmatrix} 3+\cos(\frac{3\pi}{2}-t) \\ 0 \\ \sin(\frac{3\pi}{2}-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\big(3+\cos(\frac{3\pi}{2}-t)\big)\sin(\frac{3\pi}{2}-t) \end{pmatrix} ,$$

$$(\Phi \circ K_4)'(t) = \begin{pmatrix} 3+\cos(\frac{3\pi}{2}-t) \\ 0 \\ \sin(\frac{3\pi}{2}-t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \sin(\frac{3\pi}{2}-t) \\ 0 \\ -\cos(\frac{3\pi}{2}-t) \end{pmatrix} ,$$

und daher ist

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{3\pi}{2}} f \circ \Phi \circ K_4(t) \cdot (\Phi \circ K_4)'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \left(3+\cos(\frac{3\pi}{2}-t)\right)\sin(\frac{3\pi}{2}-t)\cos(\frac{3\pi}{2}-t)\,\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Wir können dieses Integral entweder analog zu oben mittels partieller Integration berechnen, können es aber auch mittels Substitution berechnen:

$$w := \cos(\frac{3\pi}{2}-t) \rightsquigarrow \mathrm{d}w = \sin(\frac{3\pi}{2}-t)\mathrm{d}t$$

und obiges Integral wird dann gleich

$$\int_0^1 (3+w)w\,\mathrm{d}w = \left[\frac{3}{2}w+\frac{1}{3}w^2\right]_0^1 = \frac{3}{2}+\frac{1}{3} = \frac{11}{6}\,.$$

Also ist auch hier

$$\int_{\partial T} f(u)\,\mathrm{d}u = \frac{11}{6}\,.$$

Aufgabe 2: *(12 Punkte)*
Finden Sie die allgemeine Lösung des Systems $y' = Ay + h$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad h(x) = \begin{pmatrix} 2e^x \\ 4e^x \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag: Berechne zunächst die allgemeine Lösung des homogenen Systems $y' = Ay$. Wähle dazu einen beliebigen Startwert, etwa $v = (1,0)^T$, dann sind v und $Av = (-1,-4)^T$ linear unabhängig.
Das charakteristische Polynom von A ist $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$, was man entweder durch Berechnung von $\det(A - \lambda I)$ oder aus der Gleichung $A^2 v = 2Av - v$ erhält. Ein Fundamentalsystem der zugehörigen Gleichung $y'' - 2y' + y = 0$ bilden die Funktionen $g_1(x) = e^x$ und $g_2(x) = xe^x$, und daraus erhält man die Wronski-Matrix

$$M(x) = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_1' & g_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{pmatrix}.$$

Auswerten bei $x_0 = 0$, Transponieren und Invertieren ergibt

$$(M(0)^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ergibt sich als Lösung f_1 der homogenen Gleichung zum Anfangswert $f_1(0) = v$:

$$f_1(x) = (v|Av)\,(M(0)^T)^{-1} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x - 2xe^x \\ -4xe^x \end{pmatrix}.$$

Da v und Av linear unabhängig sind, kann als zweite, linear unabhängige Lösung $f_2 = f_1'$ gewählt werden:

$$f_2(x) = \begin{pmatrix} -e^x - 2xe^x \\ -4e^x - 4xe^x \end{pmatrix}$$

Also ist mit f_1 und f_2 ein Fundamentalsystem für das homogene System gefunden. Alternativ, aber aufwendiger, kann zur Bestimmung einer zweiten, linear unabhängigen Lösung auch ein weitere Startwert, etwa $v = (0,1)^T$ gewählt und obige Rechnung dafür wiederholt werden.
Nun muss noch eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems durch Variation der Konstanten berechnet werden. Die Wronski-Matrix $M(x)$ des homogenen Systems ist

$$M(x) = (f_1|f_2) = \begin{pmatrix} e^x - 2xe^x & -e^x - 2xe^x \\ -4xe^x & -4e^x - 4xe^x \end{pmatrix}$$

Auswerten bei $x = 0$ und Invertieren ergibt

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ und } M(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Damit berechnet man nun

$$M(x)^{-1} = M(0)^{-1} M(-x) M(0)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-x} + xe^{-x} & -\frac{1}{4}e^{-x} - \frac{1}{2}xe^{-x} \\ -xe^{-x} & -\frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{2}xe^{-x} \end{pmatrix}.$$

Der Ansatz

$$c'(x) = M(x)^{-1}h(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} + xe^{-x} & -\frac{1}{4}e^{-x} - \frac{1}{2}xe^{-x} \\ -xe^{-x} & -\frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{2}xe^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^x \\ 4e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

führt jetzt zu

$$c(x) = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$$

und damit erhalten wir eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems als

$$f_p(x) = M(x)c(x) = \begin{pmatrix} e^x - 2xe^x & -e^x - 2xe^x \\ -4xe^x & -4e^x - 4xe^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xe^x \\ 4xe^x \end{pmatrix},$$

sowie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems

$$f = f_p + c_1 f_1 + c_2 f_2 = e^x \begin{pmatrix} 2x + c_1(1-2x) + c_2(-1-2x) \\ 4x - 4c_1 x + c_2(-4-4x) \end{pmatrix}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ beliebig.

Aufgabe 3: *(8 Punkte)*
Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' - 3y' + 2y = 2 + 3xe^{2x}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:
In einem ersten Schritt löst man die homogene Gleichung $y'' - 3y' + 2y = 0$. Das charakteristische Polynom p dieser Differentialgleichung lautet

$$p = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2).$$

und hat die Nullstellen 1 und 2. Also lautet die allgemeine homogene Lösung f_h:

$$f_h(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

In einem zweiten Schritt bestimmt man nun irgendeine beliebige (partikuläre) Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung – und zwar entweder durch einen Ansatz nach Art der rechten Seite (Variante 1) oder durch Variation der Konstanten (Variante 2).

Variante 1: partikuläre Lösung durch Ansatz nach Art der rechten Seite
Aufgrund des Superpositionsprinzips bekommt man eine partikuläre Lösung f_p von $y'' - 3y' + 2y = 2 + 3xe^{2x}$, indem man eine partikuläre Lösung f_{p1} von $y'' - 3y' + 2y = 2 = h_1(x)$ und eine partikuläre Lösung f_{p2} von $y'' - 3y' + 2y = 3xe^{2x} = h_2(x)$ bestimmt und diese beiden addiert: $f_p = f_{p1} + f_{p2}$.

- Zunächst zu $y'' - 3y' + 2y = 2 = h_1(x)$! Weil 0 keine Nullstelle von p ist (keine Resonanz), machen wir den Ansatz
$$f_{p1}(x) = ae^{0x}.$$
Setzt man diesen Ansatz in die Differentialgleichung ein, so erhält man
$$0 + 2a = h_1(x) = 2.$$
Also $a = 1$ und $f_{p1}(x) = 1$.

- Jetzt zu $y'' - 3y' + 2y = 3xe^{2x} = h_2(x)$! Weil 2 eine einfache Nullstelle von p ist (Resonanz), machen wir den Ansatz
$$f_{p2}(x) = (b + cx)x^1 e^{2x}.$$
Zweimaliges Ableiten ergibt
$$f'_{p2}(x) = \big(b + 2(b+c)x + 2cx^2\big)e^{2x},$$
$$f''_{p2}(x) = \big(4b + 2c + (4b+8c)x + 4cx^2\big)e^{2x}.$$

Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$2cxe^{2x} + (b+2c)e^{2x} = 3xe^{2x}$$

und damit $c = \frac{3}{2}$ und $b = -3$ (Koeffizientenvergleich!). Also $f_{p2}(x) = -3xe^x + \frac{3}{2}x^2e^{2x}$.

Insgesamt erhalten wir $f_p(x) = f_{p1}(x) + f_{p2}(x) = 1 - 3xe^x + \frac{3}{2}x^2e^{2x}$.

Variante 2: partikuläre Lösung durch Variation der Konstanten
Die Wronskimatrix $M(x)$ zu f_1, f_2 und deren Inverse $M(x)^{-1}$ lauten:

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{pmatrix}, \quad M(x)^{-1} = \frac{1}{\det M(x)} \operatorname{adj}(M(x)) = \begin{pmatrix} 2e^{-x} & -e^{-x} \\ -e^{-2x} & e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

Aufgrund eines Satzes aus der Vorlesung ist eine partikuläre Lösung gegeben durch $f_p(x) = c_1(x)f_1(x) + c_2(x)f_2(x)$, wobei c_1, c_2 Funktionen sind, sodass

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = M(x)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ h(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-x} & -e^{-x} \\ -e^{-2x} & e^{-2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2+3xe^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-x} - 3xe^x \\ 2e^{-2x} + 3x \end{pmatrix}.$$

Also gilt (mit Integrationskonstanten c_{10}, c_{20}):

$$\begin{aligned} c_1(x) &= 2e^{-x} - 3(x-1)e^x + c_{10}, \\ c_2(x) &= -e^{-2x} + \frac{3}{2}x^2 + c_{20} \end{aligned}$$

(partielle Integration für c_1!). Wählt man die Integrationskonstanten c_{10}, c_{20} beide gleich 0, so erhält man eine partikuläre Lösung f_p durch

$$\begin{aligned} f_p(x) = c_1(x)f_1(x) + c_2(x)f_2(x) &= \big(2e^{-x} - 3(x-1)e^x\big)e^x + \big(-e^{-2x} + \frac{3}{2}x^2\big)e^{2x} \\ &= 1 + 3e^{2x} - 3xe^{2x} + \frac{3}{2}x^2e^{2x}. \end{aligned}$$

(Diese partikuläre Lösung unterscheidet sich von der in Variante 1 durch die Lösung $x \mapsto 3e^{2x}$ der homogenen Gleichung. Wählt man die Integrationskonstanten c_{01}, c_{02} als $c_{01} = 0$ und $c_{02} = -3$, so erhält man die partikuläre Lösung aus Variante 1.)

In einem dritten und letzten Schritt muss man schließlich noch die oben bestimmte allgemeine homogene Lösung und die oben bestimmte partikuläre Lösung addieren:

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} + 1 - 3xe^{2x} + \frac{3}{2}x^2e^{2x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}),$$

um die gesuchte allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu bekommen.

Aufgabe 4: *(10 Punkte)*
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2-periodische Abbildung, die gegeben ist durch

$$f(x) := \sinh(x), \quad x \in [-1,1), \quad f(x+2) = f(x).$$

(a) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von f. Ihre Lösung darf Ausdrücke der Form $\sinh(a)$ bzw. $\cosh(b)$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ enthalten.

(b) An welchen Stellen $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Fourier-Reihe von f? Gegen welchen Wert konvergiert die Fourier-Reihe an diesen Stellen jeweils?

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(a) Weil $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ (in Worten: weil sinh der ungerade Anteil von exp ist), ist sinh ungerade und damit gilt $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Wir müssen also nur noch

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}x\right)dx = \int_{-1}^{1} \sinh(x)\sin(n\pi x)\,dx$$

berechnen für alle $n \in \mathbb{N}$ (wobei $T = 2$ die Periode von f ist).

Variante 1: Ausnutzung von $\sinh = \cosh'$ **und** $\cosh = \sinh'$
Wegen $\sinh = \cosh'$ und $\cosh = \sinh'$ kann man das b_n-Integral mithilfe (zweimaliger) partieller Integration berechnen, und zwar wie folgt:

$$\begin{aligned}\int \sinh(x)\sin(n\pi x)\,dx &= \cosh(x)\sin(n\pi x) - n\pi\int\cosh(x)\cos(n\pi x)\,dx \\ &= \cosh(x)\sin(n\pi x) - n\pi\Big(\sinh(x)\cos(n\pi x) + n\pi\int\sinh(x)\sin(n\pi x)\,dx\Big) \\ &= \cosh(x)\sin(n\pi x) - n\pi\sinh(x)\cos(n\pi x) - n^2\pi^2\int\sinh(x)\sin(n\pi x)\,dx,\end{aligned}$$

das heißt (Auflösen der obigen Gleichung!)

$$\int \sinh(x)\sin(n\pi x)\,dx = \frac{1}{1+n^2\pi^2}\Big(\cosh(x)\sin(n\pi x) - n\pi\sinh(x)\cos(n\pi x)\Big)$$

und damit ergibt sich mit $\sin(\pm n\pi) = 0$ und $\cos(\pm n\pi) = (-1)^n$, dass

$$\begin{aligned}b_n &= \int_{-1}^{1}\sinh(x)\sin(n\pi x)\,dx = \frac{1}{1+n^2\pi^2}\Big(\cosh(x)\sin(n\pi x) - n\pi\sinh(x)\cos(n\pi x)\Big)\Big|_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{1+n^2\pi^2}\Big(-n\pi\sinh(1)\cos(n\pi) + n\pi\sinh(-1)\cos(n\pi)\Big) \\ &= \frac{2n\pi}{1+n^2\pi^2}(-1)^{n+1}\sinh(1).\end{aligned}$$

Variante 2: Ausschreiben von sinh **in die** exp**-Bestandteile**
Wegen $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ kann man das b_n-Integral auch in zwei Integrale aufteilen und diese dann wieder mit (zweimaliger) partieller Integration getrennt berechnen.

$$\begin{aligned}
\int e^x \sin(n\pi x)\,dx &= e^x \sin(n\pi x) - n\pi \int e^x \cos(n\pi x)\,dx \\
&= e^x \sin(n\pi x) - n\pi\Big(e^x \cos(n\pi x) + n\pi \int e^x \sin(n\pi x)\,dx\Big), \\
\int e^{-x} \sin(n\pi x)\,dx &= -e^{-x} \sin(n\pi x) + n\pi \int e^{-x} \cos(n\pi x)\,dx \\
&= -e^{-x} \sin(n\pi x) + n\pi\Big(-e^{-x} \cos(n\pi x) - n\pi \int e^{-x} \sin(n\pi x)\,dx\Big),
\end{aligned}$$

das heißt (Auflösen der obigen Gleichungen!)

$$\begin{aligned}
\int e^x \sin(n\pi x)\,dx &= \frac{1}{1+n^2\pi^2}\Big(e^x \sin(n\pi x) - n\pi e^x \cos(n\pi x)\Big), \\
\int e^{-x} \sin(n\pi x)\,dx &= \frac{1}{1+n^2\pi^2}\Big(-e^{-x} \sin(n\pi x) - n\pi e^{-x} \cos(n\pi x)\Big)
\end{aligned}$$

und damit ergibt sich mit $\sin(\pm n\pi) = 0$ und $\cos(\pm n\pi) = (-1)^n$, dass

$$\begin{aligned}
b_n &= \int_{-1}^{1} \sinh(x)\sin(n\pi x)\,dx = \frac{1}{2}\Big(\int_{-1}^{1} e^x \sin(n\pi x)\,dx - \int_{-1}^{1} e^{-x} \sin(n\pi x)\,dx\Big) \\
&= \frac{1}{2(1+n^2\pi^2)}\Big(e^x \sin(n\pi x) - n\pi e^x \cos(n\pi x) + e^{-x}\sin(n\pi x) + n\pi e^{-x}\cos(n\pi x)\Big)\Big|_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{2(1+n^2\pi^2)}\Big(-n\pi e^1 \cos(n\pi) + n\pi e^{-1}\cos(n\pi) + e^{-1}\cos(n\pi) - e^1\cos(n\pi)\Big) \\
&= \frac{2n\pi}{1+n^2\pi^2}(-1)^{n+1}\sinh(1).
\end{aligned}$$

Schließlich müssen wir die eben bestimmten reellen Fourierkoeffizienten noch zur reellen Fourierreihe Sf von f zusammensetzen:

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) = -2\pi \sinh(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{1+n^2\pi^2}\sin(n\pi x).$$

(b) Wie man sofort sieht, ist $f|_{(-1+2k,1+2k)}$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ stetig differenzierbar und sowohl f als auch f' sind stetig fortsetzbar auf das abgeschlossene Intervall $[-1+2k, 1+2k]$, mit anderen Worten: die einseitigen limites

$$\lim_{x \searrow -1+2k} f(x), \quad \lim_{x \searrow -1+2k} f'(x), \quad \lim_{x \nearrow 1+2k} f(x), \quad \lim_{x \nearrow 1+2k} f'(x)$$

existieren in den reellen Zahlen. Also konvergiert die Fourierreihe von f nach einem Satz der Vorlesung in jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ gegen das arithmetische Mittel aus den einseitigen Grenzwerten, kurz:

$$Sf(x) = \frac{f(x-) + f(x+)}{2} = \frac{1}{2}\Big(\lim_{y \nearrow x} f(y) + \lim_{y \searrow x} f(y)\Big)$$

Weil nun f in den Stellen $1+2k$ ($k \in \mathbb{Z}$) Sprungstellen hat und in allen anderen Stellen stetig ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} Sf(x) &= \frac{f(x-) + f(x+)}{2} = \frac{\sinh(1) + \sinh(-1)}{2} = 0 \quad \text{für } x \in \{1+2k : k \in \mathbb{Z}\}, \\ Sf(x) &= \frac{f(x-) + f(x+)}{2} = f(x) \quad \text{für } x \notin \{1+2k : k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$