**Tabelle der Standardnormalverteilung** $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} dt$:

| $x$ | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Phi(x)$ | 0.5000 | 0.5398 | 0.5793 | 0.6179 | 0.6554 | 0.6915 | 0.7257 | 0.7580 | 0.7881 | 0.8159 |
| $x$ | 1.0 | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 | 1.5 | 1.6 | 1.7 | 1.8 | 1.9 |
| $\Phi(x)$ | 0.8413 | 0.8643 | 0.8849 | 0.9032 | 0.9192 | 0.9332 | 0.9452 | 0.9554 | 0.9641 | 0.9713 |

**Aufgabe 1** (*8 Punkte*) Ein Student legt den Weg zur Uni mit den nichtaufeinander abgestimmten Verkehrsmitteln Bus und Bahn zurück. Zu 90% wird der Anschluss erreicht, ansonsten muss er auf den nächsten Zug warten. Der Student hat 100 Fahrten pro Jahr.

Es bezeichne $X$ die Anzahl der verpassten Fahrten in einem Jahr.

**(a)** Geben Sie den Namen der Verteilung, den Erwartungswert $\mu(X)$ und die Varianz $\sigma^2(X)$ der verpassten Fahrten an.

**(b)** Es soll die Wahrscheinlichkeit geschätzt werden, mit der der Student bei 100 Fahrten zwischen 6 und 14 Fahrten verpasst. Verwenden Sie für die Schätzung der Wahrscheinlichkeit

- die Ungleichung von Tschebyscheff bzw.
- den Grenzwertsatz von de Moivre und Laplace.

**(c)** Bezeichne $A$ das Ereignis, dass in 3 aufeinander folgenden Fahrten mindestens zweimal der Anschluss erreicht wird. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $p(A)$.

---

**(a)** Bei der Verteilung handelt es sich um eine Binomialverteilung. Mit $n = 100$ und $p = 0,1$ folgt

$$\mu(X) = np = 100 \cdot 0,1 = 10 \text{ und } \sigma^2(X) = n \cdot p \cdot (1-p) = 100 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 9.$$

**(b)** Tschebyscheff:

Wir bestimmen das Gegenereignis. Wähle $c = 5$ :

$$p(|X - \mu(X)| \geqq c) \leqq \frac{\sigma^2(X)}{c^2}$$
$$\Leftrightarrow p(|X - 10| \geqq 5) \leqq \frac{9}{25}$$
$$\Rightarrow p(6 \leqq X \leqq 14) = 1 - p(|X - 10| \geqq 5) \geqq 0,64$$

de Moivre und Laplace:

$$\begin{aligned} p(6 \leqq X \leqq 14) &\approx \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) \\ &= \Phi\Big(\frac{14 + 0,5 - 10}{3}\Big) - \Phi\Big(\frac{6 - 0,5 - 10}{3}\Big) \\ &= \Phi(1,5) - \Phi(-1,5) \\ &= \Phi(1,5) - (1 - \Phi(1,5)) \\ &= 2\Phi(1,5) - 1 \\ &= 2 \cdot 0,9332 - 1 = 0,8664 \end{aligned}$$

**(c)** Mit $p = 0,9$ ergibt sich

$$\begin{aligned} p(A) &= \binom{3}{2} p^2(1-p) + \binom{3}{3} p^3(1-p)^0 \\ &= 3 \cdot 0,9^2 \cdot 0,1 + 0,9^3 = 0,972. \end{aligned}$$

**Aufgabe 2** (*12 Punkte*) Gegeben sei die massive Halbkugel $\left\{(x,y,z)^T \mid x^2+y^2+z^2 \leqq 4,\ z \geqq 0\right\}$, aus der der Schnitt mit einem Kreiszylinder vom Radius 1, dessen Drehachse die $z$-Achse ist, herausgebohrt wurde. Der so entstehende Körper heiße $M$.

Ferner sei folgendes Vektorfeld gegeben

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -3xy^2 + \mathrm{e}^y \\ y^3 + \sin z \\ \frac{1}{2}z^2 \end{pmatrix}.$$

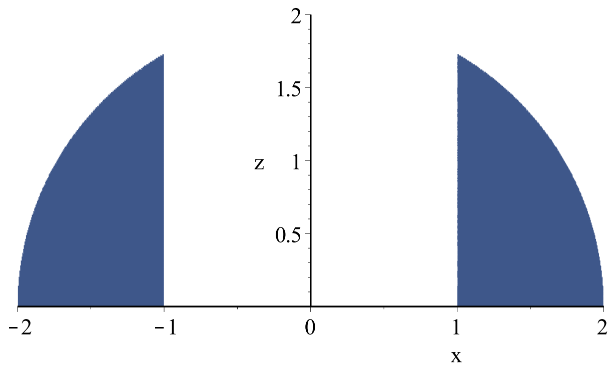
**(a)** Skizzieren Sie den Schnitt von $M$ mit der Ebene $y=0$. Bestimmen Sie eine Parametrisierung von $M$.

**(b)** Berechnen Sie das Volumen von $M$.

**(c)** Bestimmen Sie die Koordinaten des Schwerpunkts $S$ von $M$. Hierbei habe $M$ die konstante Dichte $\rho = 1$.

**(d)** Bestimmen Sie den Fluss von g durch die gesamte Oberfläche von $M$ (von Innen nach Außen).

---




Skizze des Schnitts von $M$ mit der Ebene $y=0$

**Variante 1:**

**(a)** Parametrisierung über Zylinderkoordinaten mit "$z$ in Abhängigkeite von $r$". Der Körper $M$ lässt sich parametrisieren über

$$\left\{(r\sin\varphi, r\cos\varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in [1,2], \varphi \in [0,2\pi), z \in \left[0, \sqrt{4-r^2}\right]\right\}.$$

**(b)** Es gilt

$$V(M) = \iiint\limits_M 1 \mathrm{d}V.$$

Einsetzen der Parametrisierung liefert unter Beachtung der Funktionaldeterminante für die Transformation von kartesischen in Zylinderkoordinaten, welche in diesem Fall $r$ ist:

$$\begin{aligned} V(M) &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{2} \int_{z=0}^{\sqrt{4-r^2}} r \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \\ &= 2\pi \int_{r=1}^{2} r\sqrt{4-r^2} \, \mathrm{d}r. \end{aligned}$$

Substituiert man nun $u = 4 - r^2$, so erhält man mit $\mathrm{d}r = \dfrac{\mathrm{d}u}{-2r}$:

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{r=1}^{2} r\sqrt{4-r^2} \, \mathrm{d}r &= 2\pi \int_{u=3}^{0} -\frac{1}{2}\sqrt{u} \, \mathrm{d}u \\ &= -\pi \left[ \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_3^0 \\ &= \frac{2\pi}{3} 3\sqrt{3} = 2\pi\sqrt{3}. \end{aligned}$$

**(c)** Da der Körper rotationssymmetrisch zur $z$-Achse ist, liegt der Schwerpunkt auf der $z$-Achse. Es gilt für die $z$-Koordinate $S_z$ des Schwerpunktes $S = (0, 0, S_z)$:

$$\begin{aligned} S_z = \frac{1}{V(M)} \iiint_M z \, \mathrm{d}V &= \frac{1}{V(M)} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{2} \int_{z=0}^{\sqrt{4-r^2}} z \cdot r \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{V(M)} \cdot 2\pi \int_{r=1}^{2} \frac{1}{2}(4 - r^2) r \, \mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{V(M)} \cdot \pi \left[ 2r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right]_1^2 \\ &= \frac{\frac{9}{4}\pi}{2\pi\sqrt{3}} = \frac{3}{8}\sqrt{3} \end{aligned}$$

Daher hat der Schwerpunkt die Koordinaten $S = (0, 0, \frac{3}{8}\sqrt{3})$.

**(d)** Der Fluss durch die Oberfläche lässt sich mit dem Satz von Gauss bestimmen:

$$\iint_{\partial M} g \cdot n \, \mathrm{d}F = \iiint_M \mathrm{div}(g) \, \mathrm{d}V.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(g) &= \partial_x g_1 + \partial_y g_2 + \partial_z g_3 \\ &= -3y^2 + 3y^2 + z \\ &= z. \end{aligned}$$

Somit errechnet sich der Fluss wie folgt.

$$\iiint_M \mathrm{div}(g) \, \mathrm{d}V = \iiint_M z \, \mathrm{d}V \overset{\textbf{(c)}}{=} \frac{9}{4}\pi.$$

**Variante 2:**

**(a)** Parametrisierung über Zylinderkoordinaten mit "$r$ in Abhängigkeite von $z$". Der Körper $M$ lässt sich parametrisieren über

$$\left\{(r\sin\varphi, r\cos\varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in \left[1, \sqrt{4-z^2}\right], \varphi \in [0, 2\pi), z \in \left[0, \sqrt{3}\right]\right\}.$$

**(b)** Es gilt ebenfalls

$$\begin{aligned}
V(M) &= \iiint\limits_M 1 \mathrm{d}V \\
&= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{\sqrt{3}} \int_{r=1}^{\sqrt{4-z^2}} r \ \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\varphi \\
&= 2\pi \int_{z=0}^{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{2} r^2\right]_1^{\sqrt{4-z^2}} \mathrm{d}z \\
&= 2\pi \int_{z=0}^{\sqrt{3}} \left(2 - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}z \\
&= 2\pi \left[\frac{3}{2}z - \frac{1}{6}z^3\right]_0^{\sqrt{3}} \\
&= 2\pi \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{6}\right) \\
&= 2\pi\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

**(c)** Analog zu **Variante 1**.

**(d)** Analog zu **Variante 1**.

**Variante 3:**

**(a)** Parametrisierung über Kugelkoordinaten. Der Körper lässt sich parametrisieren wie folgt:

$$\left\{(r\cos\theta\sin\varphi, r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in \left[\frac{1}{\sin\theta}, 2\right], \varphi \in [0, 2\pi), \theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

**(b)** Es ergibt sich also unter Berücksichtigung der Funktionaldeterminante für die Transformation von kartesischen in Kugelkoordinaten, welche den Wert $r^2 \sin\theta$ besitzt:

$$\begin{aligned}
V(M) &= \iiint\limits_M 1 \mathrm{d}V \\
&= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=\pi/6}^{\pi/2} \int_{r=\frac{1}{\sin\theta}}^{2} r^2 \sin\theta \ \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi \\
&= 2\pi \int_{\theta=\pi/6}^{\pi/2} \left(\frac{8}{3}\sin\theta - \frac{1}{3\sin^2\theta}\right) \mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

Es gilt nun aber $\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)' = -\frac{1}{\sin^2\theta}$ und daher

$$\begin{aligned} V(M) &= 2\pi \int_{\theta=\pi/6}^{\pi/2} \left(\frac{8}{3}\sin\theta - \frac{1}{3\sin^2\theta}\right)\, \mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi \left[-\frac{8}{3}\cos\theta + \frac{\cos\theta}{3\sin\theta}\right]_{\pi/6}^{\pi/2} \\ &= 2\pi\sqrt{3}. \end{aligned}$$

**(c)** Wie in **Variante 1** ist aus Symmetriegründen $S_x = S_y = 0$ und daher nur $S_z$ zu berechnen.

$$\begin{aligned} S_z &= \frac{1}{V(M)} \iiint\limits_M z\, \mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{V(M)} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=\pi/6}^{\pi/2} \int_{r=\frac{1}{\sin\theta}}^{2} r^3 \sin^2\theta\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi \qquad (\text{wegen } z = r\sin\theta) \\ &= \ldots \qquad \text{analog zu } \textbf{Variante 3 (b)} \\ &= \frac{3}{8}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Somit liegt der Schwerpunk in $S = (0, 0, \frac{3}{8}\sqrt{3})$.

**(d)** Analog zu **Variante 1**.

**Aufgabe 3** (*7 Punkte*) Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + y = -\frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}.$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung mit Hilfe der Variation der Konstanten.

*Hinweis:* $\mathrm{e}^x$ und $x\mathrm{e}^x$ sind Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung.

---

Die Lösungen der homogenen Differentialgleichung haben die Form

$$y_{hom} = c_1\mathrm{e}^x + c_2 x\mathrm{e}^x.$$

Der Ansatz für die Variation der Konstanten lautet somit

$$y_{allg} = c_1(x)\mathrm{e}^x + c_2(x)x\mathrm{e}^x.$$

Dies liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1'(x)\mathrm{e}^x + c_2'(x)x\mathrm{e}^x &= 0 \\ c_1'(x)\mathrm{e}^x + c_2'(x)(1+x)\mathrm{e}^x &= -\frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1} \end{aligned}$$

Subtrahiert man von der zweiten Gleichung die erste, so erhält man

$$c_2'(x)\mathrm{e}^x = -\frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1} \Leftrightarrow c_2'(x) = -\frac{1}{x^2+1}$$

Es gilt also

$$c_2(x) = \int -\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = -\arctan(x).$$

Setzt man $c_2'(x)$ in die erste Gleichung ein, so erhält man

$$c_1'(x)\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x\left(-\frac{1}{x^2+1}\right) = 0 \Leftrightarrow c_1'(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

Es gilt also

$$c_1(x) = \int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet somit

$$y_{allg} = c_1\mathrm{e}^x + c_2 x\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\mathrm{e}^x + (-\arctan x)x\mathrm{e}^x.$$

| Name, Vorname: | | Matrikel-Nummer: | | Studien-gang: | |
|---|---|---|---|---|---|

**Aufgabe 4** (*5 Punkte*) Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$u_{xx} - 2u_{tt} - 4u_x = 0.$$

**(a)** Gesucht sind nicht-triviale Lösungen der Gestalt $u(x,t) = v(x) \cdot w(t)$.

Bestimmen Sie eine gewöhnliche Differentialgleichung, die $v$ erfüllt:

$$\boxed{v_{xx} - 4v_x - kv = 0}$$

Bestimmen Sie eine gewöhnliche Differentialgleichung, die $w$ erfüllt:

$$\boxed{2w_{tt} - kw = 0}$$

**(b)** Sei nun $w(t) = \sin(\sqrt{2}t)$. Bestimmen Sie zu diesem $w$ eine gewöhnliche Differentialgleichung, die $v$ erfüllt:

$$\boxed{v_{xx} - 4v_x + 4v = 0}$$

Bestimmen Sie alle Lösungen der partiellen DGL der Form $u(x,t) = v(x) \cdot \sin(\sqrt{2}t)$:

$$u(x,t) = \boxed{(c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}) \sin(\sqrt{2}t)}$$

---

**Aufgabe 5** (*11 Punkte*) Die **4-periodische** Fortsetzung der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3 & -2 \leqq x < 0 \\ -1 & 0 \leqq x < 2 \end{cases}$$

soll in eine Fourier-Reihe $F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n x) + b_n \sin(\omega_n x)$ entwickelt werden.

**(a)** Berechnen Sie die Koeffizienten $a_0$ und $a_n$ für $n \geqq 1$ auf einem **separaten Blatt**.

*Hinweis:* Folgendes Integral kann für die Berechnung hilfreich sein:

$$\int x^2 \cos(\omega_n x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\omega_n^3}((x^2\omega_n^2 - 2)\sin(\omega_n x) + 2x\omega_n \cos(\omega_n x)).$$

---

**Lösung:**

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(\int_{-2}^{0} -x^2 + 3\mathrm{d}x - \int_0^2 1\mathrm{d}x) \\ &= \frac{1}{4}\left[-\frac{x^3}{3} + 3x\right]_{-2}^{0} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-x^2+3)\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} -\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-2}^{0} x^2\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x + \frac{3}{2}\int_{-2}^{0}\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{0}^{2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{8}{n^3\pi^3}(x^2\frac{n^2\pi^2}{4}-2)\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\right]_{-2}^{0} - \frac{1}{2}\left[\frac{8}{n^3\pi^3}2x\frac{n\pi}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\right]_{-2}^{0} + 0 \\
&= 0 + 0 - \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{n^2\pi^2}\cdot(-2)\cdot(-1)^n\right) \\
&= -\frac{8}{n^2\pi^2}(-1)^n
\end{aligned}
$$

---

**(b)** An welchen Stellen $x \in [-2,2)$ konvergiert die Fourierreihe $F$ gegen $f$?

$\boxed{x \in [-2,2)\backslash\{0\}}$

Welchen Wert besitzt $F$ an Sprungstellen von $f$? $\boxed{1}$

**(c)** Berechnen Sie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$, indem Sie $f$ an einer geeigneten Stelle $x_0$ auswerten.

$x_0 = \boxed{x_0 \in \{-2,2\}}$ , $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \boxed{\frac{\pi^2}{6}}$

Berechnen Sie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$, indem Sie $F$ an einer geeigneten Stelle $x_0$ bestimmen.

$x_0 = \boxed{0}$ , $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} = \boxed{-\frac{\pi^2}{12}}$

---

**Aufgabe 6** (*11 Punkte*) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem $Y'(X) = A \cdot Y(X) + B(X)$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x\mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix}.$$

Ferner seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

**(a)** Welche der Vektoren $v_1, v_2, v_3$ sind Eigenvektoren von $A$? $\boxed{v_1, v_3}$

**(b)** Zeigen Sie, dass $v_1, v_2, v_3$ Hauptvektoren von $A$ sind.

Es gilt $Av_1 = 2v_1, Av_3 = 3v_3$ Ferner gilt $(A-2E_3)v_2 = v_1$ bzw. $(A-2E_3)^2 v_2 = 0$

**(c)** Bestimmen Sie die Inverse $T^{-1}$ der Matrix $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$T^{-1} = \left( \boxed{\begin{matrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} \right)$$

**(d)** Bringen Sie die Differentialgleichung durch Koordinatentransformation in die Form

$$Z' = J \cdot Z + \tilde{B}(Z),$$

wobei $J$ die Jordan-Normalform von $A$ ist.

$$Z' = \left( \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix}} \right) \cdot Z + \left( \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 2x\mathrm{e}^{3x} \end{matrix}} \right)$$

**(e)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der transformierten Gleichung aus dem Aufgabenteil **(d)**.

$$Z_{inh} = \boxed{c_1 \begin{pmatrix} x\mathrm{e}^{2x} \\ \mathrm{e}^{2x} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^2\mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}}$$

| **Name, Vorname:** | | **Matrikel-Nummer:** | | **Studien-gang:** | |
|---|---|---|---|---|---|

**Aufgabe 7** (*8 Punkte*) In Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ und $n > 0$ sei das Vektorfeld

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} p(x,y) \\ q(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x\cos(ny) \\ 2x^2\sin(ny) \end{pmatrix}$$

gegeben.

**(a)** Für welches $n$ besitzt g ein Potential? $n = \boxed{4}$

Begründung:

$rot\, g = 0$ und Definitionsbereich ist einfach zusammenhängend.

**(b)** Für die Differentialgleichung

$$-x\cos(2y) + 2x^2\sin(2y)y' = 0 \qquad (x > 0)$$

bestimme man einen nur von $x$ abhängenden integrierenden Faktor $\mu$ und die zu seiner Berechnung notwendige Differentialgleichung.

$$\frac{\mu'}{\mu} = \boxed{-\tfrac{1}{x}} \qquad \mu = \boxed{\tfrac{1}{x}}$$

**(c)** Es seien

$$\tilde{P}(x,y) = \mu(x)\cdot(-x\cos(2y)) \quad \text{und} \quad \tilde{Q}(x,y) = \mu(x)\cdot(2x^2\sin(2y)).$$

Bestimmen Sie ein Potential $F$ für das Vektorfeld $(\tilde{P}(x,y), \tilde{Q}(x,y))$.

$$F(x,y) = \boxed{-x\cos(2y)}$$

**(d)** Geben Sie eine Gleichung für die Lösung der Differentialgleichung aus **(b)** an, welche durch den Punkt $(1, \frac{\pi}{8})$ verläuft. $\boxed{-x\cos(2y) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}}$

**(e)** Welche Steigung hat die Tangente einer Lösung der DGL aus **(b)** im Punkt $(1, \frac{\pi}{8})$? $\boxed{\frac{1}{2}}$