Aufgabe 1 (Komplexe Zahlen) (6 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden komplexe Zahlen:

$$z = (\sqrt{3} + i)^2, \qquad w = \frac{1}{1+i} .$$

Stellen Sie jeweils das Ergebnis sowohl in der Form $a + bi$, mit reellen Zahlen a und b, als auch in der Form $r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$, mit positivem r und $0 \leq \varphi < 2\pi$, dar.

Aufgabe 2 (Lineares Gleichungssystem) (8 Punkte)
Sei das folgende lineare Gleichungssystem auf dem $\mathbb{R}^7$ gegeben.

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & -x_2 & +2x_3 & +x_4 & +x_5 & -2x_6 & +x_7 & = 4, \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 & +2x_5 & -x_6 & +x_7 & = 3, \\ -x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +2x_4 & -x_5 & -x_6 & & = 1. \end{array}$$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems und geben Sie eine Basis des Lösungsraums des zugehörigen homogenen Systems an.

Aufgabe 3 (Inverse Matrix) (6 Punkte)
Seien die reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

gegeben. Entscheiden Sie in beiden Fällen, ob die inverse Matrix A^{-1} bzw. B^{-1} existiert und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

Aufgabe 4 (Kapitalentwicklung) (6 Punkte)
Jemand zahlt 20 Jahre lang jedes Jahr zu Jahresanfang 20.000 € in einen Sparvertrag ein. Das Guthaben wird jeweils zum Jahresende mit 2% verzinst.

a) Wie hoch ist nach zwanzig Jahren der Kontostand?
b) Wie viele Jahre müsste der Sparvertrag bei sonst gleichen Konditionen laufen, damit am Ende mindestens eine Million Euro auf dem Konto sind?

Aufgabe 5 (Folgen und Reihen) (6 Punkte)

a) Seien die Folgen

$$a_n := \frac{1}{3^n}, \qquad b_n := \frac{2}{n+1}, \qquad c_n := \frac{n^2}{n^2 + 10n + 1000}$$

gegeben. Geben Sie für jede der drei Folgen jeweils an, ob es sich um eine konvergente Folge handelt, und was gegebenenfalls der Grenzwert ist.
b) Betrachten Sie nun die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$. Entscheiden Sie, ob diese konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(bitte wenden)

Aufgabe 6 (Funktionsgrenzwerte) (6 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte:

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin(x)}, \qquad\qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

Aufgabe 7 (Definitheit) (6 Punkte)

Welche der folgenden reellen symmetrischen Matrizen sind positiv definit, welche sind negativ definit?

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 8 (Lokale Extrema) (8 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = x^2 + x + \frac{1}{2}y^2 + y + xy$ auf $\mathbb{R}^2$.

a) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(x, y)$ und die Hessematrix $\mathrm{Hess} f(x, y)$.
b) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion.

Die folgenden Aufgaben bearbeiten Sie bitte nur,
falls Sie 9 Leistungspunkte erwerben möchten.

Aufgabe 9 (Flachstellen unter Nebenbedingung) (6 Punkte)

Sei die Funktion $f(x, y, z) = x^2y^3z$ für positive reelle Zahlen x, y, z definiert. Finden Sie alle Flachstellen von f unter der Nebenbedingung $x + y + z = 12$.

Aufgabe 10 (Taylorpolynom) (6 Punkte)

Sei die Funktion $f(x) = e^{x(x+1)}$ für reelle x gegeben. Bestimmen Sie das Taylorpolynom dritter Ordnung am Entwicklungspunkt $x = 0$.

Aufgabe 11 (Differentialgleichung) (6 Punkte)

Finden Sie eine Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$y' = \exp(x) \cdot y, \qquad y(0) = 1.$$

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!