# Klausur zur Höheren Mathematik I und II

## für die Fachrichtungen: el, kyb, mecha, phys, tpel

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel: keine**.
  Insbesondere sind Taschenrechner, Handys und Computer nicht erlaubt.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- **Alle 10 Aufgaben** zählen.
- Bei **allen Aufgaben** sind sämtliche Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab **30. September 2014** über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

**Hinweise für Wiederholer:**

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, werden ab **30. September 2014** nähere Informationen bezüglich der mündlichen Nachprüfung auf der Homepage zu HM II–Hesse
(`http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Hesse-SS14/`) finden.

Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

bitte Rückseite beachten

Folgende Ableitungen und Funktionswerte könnten hilfreich sein ($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in (0, \infty)$):

| $f(x)$ | $x^a$ | $\mathrm{e}^x$ | $\sin(x)$ | $\tan(x)$ | $\sinh(x)$ | $\operatorname{arsinh}(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$ | $a\, x^{a-1}$ | $\mathrm{e}^x$ | $\cos(x)$ | $\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$ | $\cosh(x)$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ |

| $f(x)$ | $b^x$ | $\ln\lvert x\rvert$ | $\cos(x)$ | $\arctan(x)$ | $\cosh(x)$ | $\operatorname{arcosh}(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$ | $\ln(b)\, b^x$ | $\frac{1}{x}$ | $-\sin(x)$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | $\sinh(x)$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ |

| $x$ | $\sin(x)$ | $\cos(x)$ |
|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | $1$ | $0$ |

**Aufgabe 1 (12 Punkte)**

**(a)** Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene. Verwenden Sie für jede Teilaufgabe ein neues Koordinatensystem.

**($\mathbf{a_1}$)** $M_1 := \left\{ r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \mid r \geqq 0,\, \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \right\}$,

**($\mathbf{a_2}$)** $M_2 := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z^2) = 0 \right\}$,

**($\mathbf{a_3}$)** $M_3 := \{ z \in \mathbb{C} \mid z = \overline{z} \}$,

**($\mathbf{a_4}$)** $M_4 := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \geqq 1 \right\}$.

**(b)** Sei $z_0 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

**($\mathbf{b_1}$)** Finden Sie die Polardarstellung von $z_0 = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ mit $r \in [0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

**($\mathbf{b_2}$)** Berechnen Sie $z_0^{100}$ und geben Sie das Ergebnis sowohl in Polardarstellung wie in **($\mathbf{b_1}$)** als auch in der Form $a + \mathrm{i}b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

---

**Aufgabe 2 (6 Punkte)** Gegeben sind die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist eindeutig definiert durch die Vorgaben

$$L(v_1) = v_1,\ L(v_2) = v_2,\ L(v_3) = 4v_3.$$

**(a)** Welche Eigenwerte besitzt $L$?

**(b)** Berechnen Sie die Matrix ${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}^{L}$ der Abbildung $L$ bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$.

**(c)** Berechnen Sie die Matrix ${}_{\mathcal{E}}M_{\mathcal{E}}^{L}$ der Abbildung $L$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$.

---

**Aufgabe 3 (8 Punkte)** Gegeben sei die Gleichung

$$5x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_2^2 = 36. \tag{1}$$

**(a)** Bestimmen Sie eine symmetrische Matrix $A$, so dass die Gleichung in der Gestalt

$$x^\top Ax = 36 \quad \text{mit } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

geschrieben werden kann.

**(b)** Bestimmen Sie die Eigenvektoren und Eigenwerte der Matrix $A$.

**(c)** Skizzieren Sie die Lösungsmenge der Gleichung (1) in der $x_1$-$x_2$-Ebene. Um welchen Kegelschnitt handelt es sich?

---

**Aufgabe 4 (6 Punkte)** Gegeben seien die Punkte $A = (-1, 0, 1)$, $B = (1, 3, 0)$ und $C = (1, 1, 1)$.

**(a)** Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $ABC$.

**(b)** Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene $E$ an, die die Punkte $A$, $B$, $C$ enthält.

**(c)** Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene $E$.

**(d)** Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $P = (4, 7, 12)$ von der Ebene $E$.

---

**Aufgabe 5 (6 Punkte)**

Berechnen Sie die nachstehenden Grenzwerte.

**(a)** $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3-n}{3^n}}$

**(b)** $\lim_{n\to\infty} n \cdot \tan(1/n)$

**(c)** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n+3^n}{n!}$

**(d)** $\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

---

**Aufgabe 6 (8 Punkte)**

Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sin(\cos(x)), \qquad g(x) = \cos(\cos(x)).$$

**(a)** Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen von $f$.

**(b)** Geben Sie alle Nullstellen von $f$ an.

**(c)** Begründen Sie, warum $g$ keine Nullstellen besitzt.

**(d)** Geben Sie alle Hoch- und Tiefpunkte von $f$ im abgeschlossenen Intervall $[-\pi, \pi]$ an.

---

**Aufgabe 7 (7 Punkte)**

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sin(2x).$$

**(a)** Bestimmen Sie die ersten vier Ableitung von $f$.

**(b)** Geben Sie die $n$-te Ableitung ($n \in \mathbb{N}$) von $f$ an.

**(c)** Geben Sie damit die Taylorreihe von $f$ mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{\pi}{4}$ an.

**(d)** Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe?

---

### Aufgabe 8 (10 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

**(a)** $\displaystyle\int (x^2+1)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}\,\mathrm{d}x$ **(c)** $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+2}{(x-2)(x^2+2)}\,\mathrm{d}x$

---

### Aufgabe 9 (4 Punkte)

Gegeben seien die Abbildungen

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\quad f(x,y,z)=\begin{pmatrix} x+y\\ 2z+x\end{pmatrix}\qquad \text{und}\qquad g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad g(x,y)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^y\\ \mathrm{e}^x\end{pmatrix}.$$

**(a)** Bestimmen Sie die Jacobimatrix $\mathrm{J}f(x,y,z)$ von $f$.

**(b)** Bestimmen Sie die Jacobimatrix $\mathrm{J}g(x,y)$ von $g$.

**(c)** Bestimmen Sie die Jacobimatrix $\mathrm{J}(g\circ f)(x,y,z)$ von $g\circ f$.

---

### Aufgabe 10 (5 Punkte)

Verwenden Sie die Multiplikatormethode nach Lagrange, um denjenigen Quader mit maximalem Volumen zu finden, dessen Raumdiagonale die Länge 1 hat.

---