Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 7** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 8 – 10** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	$x\ln x - x$	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$	e^x
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	$\ln x$	$\cos x$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	e^x
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$	
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 10.04.2015 über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **13.04.2015** bis **17.04.2015** mit Elke Gangl (Raum 7.521) einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*6 Punkte*)

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die Matrix $A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Spur von A_α.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix A_α.

(c) Zeichnen Sie die Menge $\{c \in \mathbb{C} \mid \text{Es gibt ein } \alpha \in \mathbb{R} \text{ so, dass } c \text{ Eigenwert von } A_\alpha \text{ ist}\}$ in der komplexen Zahlenebene ein.

Aufgabe 2 (*5 Punkte*) Bestimmen Sie:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right)$ **(b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4n^5+3n-1}{-n^4+35n^3-108n^2+13}\right)$ **(c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(3\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-9)^k}{(2k+1)!}\right)$

Aufgabe 3 (*5 Punkte*)

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n2^{n+1}-2^n}.$$

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (*5 Punkte*)

Gegeben sei die Funktion $f\colon (-2,+\infty) \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \ln(2+x)$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2(f,x,x_0)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = -1$.

(b) Berechnen Sie den Wert $T_2(f,-\frac{1}{2},-1)$.

(c) Geben Sie das Restglied nach Lagrange an.

(d) Geben Sie eine Abschätzung für den Fehler $\left|T_2(f,-\frac{1}{2},-1) - f(-\frac{1}{2})\right|$ an.

Aufgabe 5 (*10 Punkte*)

Bestimmen Sie bei jedem der folgenden Integrale den Wert oder geben Sie an, warum es nicht existiert:

(a) $\displaystyle\int \frac{3x-4}{x^3-2x^2}\,\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int_0^{\mathrm{e}} \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}\,\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}(x-1)\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*)

Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x,y) \mapsto \sqrt{6}\,x - \sqrt{3}\,y$ unter der Nebenbedingung $x^2+y^2=1$.

Aufgabe 7 (*4 Punkte*)

Durch $C\colon [0,4\pi] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \left(t\cos(t),\, t\sin(t),\, t\right)^\intercal$ sei ein idealisierter Draht parametrisiert.

Die Massendichte des Drahtes betrage $\rho(C(t)) = \sqrt{t\,/\,(2+t^2)}$.

Berechnen Sie die Gesamtmasse des Drahtes, die durch das Kurvenintegral $\displaystyle\int_C \rho(s)\,\mathrm{d}\,s$ gegeben ist.

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studiengang:**	

Aufgabe 8 (*3 Punkte*)

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie

$\det(A) = \boxed{}$, $\det(B) = \boxed{}$, $\det(\sqrt[4]{5}B) = \boxed{}$.

Aufgabe 9 (*7 Punkte*) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A_α.

(b) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die wenigstens ein Eigenwert von A_α mindestens die algebraische Vielfachheit 2 besitzt.

(c) Bestimmen Sie die Eigenräume von $A_{\frac{1}{2}}$.

(d) Bestimmen Sie die Eigenräume von A_1.

(e) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die A_α diagonalisierbar ist.

Aufgabe 10 (*10 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + 2x_2)^2 + 4(2x_1 - x_2)^2 \,.$$

(a) Bestimmen Sie den Funktionswert $f(2,4) =$

(b) Die Niveaumenge $E := \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, f(x_1, x_2) = f(2,4) \right\}$, die den Punkt $(2,4)$ enthält, ist eine Ellipse. Geben Sie die symmetrische Matrix A für die Matrixbeschreibung

$$x^{\intercal} A x + 2a^{\intercal} x - f(2,4) = 0$$

von E an: $A =$

(c) Geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, in dem E euklidische Normalform hat.

$\mathbb{F} =$

(d) Geben Sie die Halbachsenlängen der Ellipse E an:

(e) Skizzieren Sie E sowie das Koordinatensystem $\mathbb{F}$: