Klausur zur Höheren Mathematik I und II

für die Fachrichtungen: el, kyb, mecha, phys, tpel

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel: keine**.
  Insbesondere sind Taschenrechner, Handys und Computer nicht erlaubt.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- **Alle 9 Aufgaben** zählen. Insgesamt sind maximal **56** Punkte zu erreichen.
- Bei **allen Aufgaben** sind sämtliche Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab **01. April 2015** über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, werden ab **01. April 2015** nähere Informationen bezüglich der mündlichen Nachprüfung auf der Homepage zu HM II–Hesse (`http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Hesse-SS14/`) finden.

Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

bitte Rückseite beachten

Folgende Ableitungen und Funktionswerte könnten hilfreich sein ($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in (0,\infty)$):

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$\frac{1}{\left(\cos(x)\right)^2}$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Aufgabe 1 (8 Punkte)

(a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $z = \dfrac{3+\mathrm{i}}{4-2\mathrm{i}}$.

(b) Skizzieren Sie folgende Mengen in der komplexen Zahlenebene:

($\mathbf{b_1}$) $M_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z - \mathrm{i}| = 3\}$,

($\mathbf{b_2}$) $M_2 := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{1}{4}\}$,

($\mathbf{b_3}$) $M_3 := \{z \in \mathbb{C} : |z| + \operatorname{Re}(z) \leqq 1\}$.

(c) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^4 = -16,$$

und geben Sie diese sowohl in Polardarstellung als auch in der Form $a + \mathrm{i}b$ mit $a,\ b \in \mathbb{R}$ an.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Gegeben ist die vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix

$$C(\alpha) = \begin{pmatrix} 4 & \alpha-3 & -2 \\ 2 & \alpha-1 & -2 \\ 3-\alpha & \alpha-3 & \alpha-1 \end{pmatrix}$$

und die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass v_1, v_2, v_3 Eigenvektoren von $C(\alpha)$ sind und bestimmen Sie die zugehörigen Eigenwerte.

Aufgabe 3 (5 Punkte) Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

(a) $\displaystyle\int x^2 \sin(x)\,\mathrm{d}x$, **(b)** $\displaystyle\int \frac{1}{x \cdot \ln(x)}\,\mathrm{d}x$ für $x > 1$, **(c)** $\displaystyle\int 3^{x+1}\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 4 (7 Punkte) Gegeben Sei die Funktion

$$f(x) = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

(a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von f und zeigen Sie, dass f keine Nullstellen besitzt.

(b) Berechnen Sie die erste Ableitung von f und finden Sie alle lokalen Extrema von f.

(c) Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\ln x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\ln x}.$$

(d) Nutzen Sie die in den vorherigen Teilaufgaben gewonnenen Informationen, um f in einem geeigneten Koordinatensystem zu skizzieren.

Aufgabe 5 (5 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n(n+3)} - n\right)$ **(b)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2+n}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}$ **(d)** $\lim\limits_{n\to\infty} 2n \cdot \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

Aufgabe 6 (4 Punkte) Gegeben sei die Funktion

$$f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto x^y.$$

Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiter Stufe $T_2(f,(x,y),(1,1))$ von f im Entwicklungspunkt $(x_0,y_0) = (1,1)$.

Aufgabe 7 (6 Punkte) Verwenden Sie die Multiplikatormethode nach Lagrange, um denjenigen Quader mit maximaler Oberfläche zu finden, dessen Raumdiagonale die Länge 1 hat. Geben Sie die maximale Oberfläche an.

Hinweis: Sie dürfen voraussetzen, dass das Maximum der Oberfläche nicht angenommen wird, wenn mindestens eine der Seitenlängen gleich 0 ist.

Aufgabe 8 (11 Punkte) Gegeben sind die Ebenen

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 : x_1+x_2+2x_3=0\right\}, \\ E_2 &= \left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 : \left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=3\right\}. \end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie den Winkel α zwischen E_1 und E_2.

(b) Begründen Sie, dass E_1 ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist.

(c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von E_1.

(d) Es sei $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ die Spiegelung an E_1. Berechnen Sie für jeden Punkt $(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$ den Bildpunkt und geben Sie die Abbildungsmatrix ${}_{\mathcal{E}}M_{\mathcal{E}}^{L}$ an ($\mathcal{E}$ = kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$).

Aufgabe 9 (7 Punkte) Gegeben sind die Vektoren

$$a=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\quad c=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

(a) Begründen Sie, dass $\mathcal{B}=\{a,b,c\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Ein Vektor x habe bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ die Koordinaten $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. Wie lauten seine Koordinaten bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{E}=\{e_1,e_2,e_3\}$?

(c) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix ${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{E}}^{\mathrm{Id}}$.

(d) Gegeben ist der Vektor $y=4e_1-2e_2+3e_3$. Berechnen Sie die Koordinaten von y bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.