Aufgabe 1 (*10 Punkte*) Es sei

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2,\ z \leqq 2\}.$$

(a) (*6 Punkte*) Berechnen Sie den Flächeninhalt von S.

(b) (*4 Punkte*) Berechnen Sie die Zirkulation des Vektorfelds $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ längs ∂S mit

$$f(x, y, z) = (z + \sin^3(x), x - \cos^3(y), y + e^{2z}).$$

(a)

Eine mögliche Parametrisierung der Fläche lautet:

$$\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} \sqrt{u}\cos v \\ \sqrt{u}\sin v \\ u \end{pmatrix}, \quad 0 \leqq u \leqq 2,\ 0 \leqq v \leqq 2\pi.$$

Damit ergibt sich

$$\Phi_u = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u^{-1/2}\cos v \\ \frac{1}{2}u^{-1/2}\sin v \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi_v = \begin{pmatrix} -u^{1/2}\sin v \\ u^{1/2}\cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\Phi_u \times \Phi_v = \begin{pmatrix} -u^{1/2}\cos v \\ -u^{1/2}\sin v \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Der Flächeninhalt der Fläche S ist

$$F(S) = \int_0^2 \int_0^{2\pi} |\Phi_u \times \Phi_v| \,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{u + \frac{1}{4}} \,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = 2\pi \int_0^2 \sqrt{u + \frac{1}{4}} \,\mathrm{d}u.$$

Mit der Substitution $t = u + \frac{1}{4}$, also $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$, ergibt dies:

$$F(S) = 2\pi \int_{1/4}^{9/4} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = 2\pi\, \frac{2}{3} t^{3/2} \Big|_{1/4}^{9/4} = \frac{13\pi}{3}.$$

(b)

Aus dem Satz von Stokes wissen wir:

$$Z(f, \partial S) = \iint_S (\mathrm{rot} f) \cdot n \,\mathrm{d}O,$$

wobei wir die Randfläche von S mit ∂S und den Einheitsnormalenvektor auf S mit n bezeichnen. Für die Rotation in kartesischen Koordinaten erhalten wir

$$\operatorname{rot} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \iint_S (\operatorname{rot} f) \cdot n \,\mathrm{d}O &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \operatorname{rot} f(\Phi(u,v)) \cdot (\Phi_u \times \Phi_v) \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (1,1,1)^\top \cdot (-\sqrt{u}\cos v, -\sqrt{u}\sin v, \frac{1}{2})^\top \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (-\sqrt{u}\cos v - \sqrt{u}\sin v + \frac{1}{2}) \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}u = 2\pi. \end{aligned}$$

Bemerkung: Wenn man die entgegengesetzte Normale wählt, erhält man $Z(f, \partial S) = -2\pi$.

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Lösen Sie folgendes Anfangswertproblem

$$\frac{y'}{x^3y-2y}=5x, \qquad x>\frac{3}{2}$$
$$y(2)=5.$$

Variante 1: Lösen mit Hilfe der Formel von Satz 3.3.8

Hierfür müssen wir die DGL in die Form

$$y'(x)+g(x)y(x)=h(x)$$

bringen.

Dies kann man erreichen, indem man beide Seiten der Gleichung mit $x^3y(x)-2y(x)$ multipliziert und dann alles auf eine Seite bringt:

$$\frac{y'(x)}{x^3y(x)-2y(x)}=5x$$
$$y'(x)=(5x^4-10x)y(x)$$
$$y'(x)+(-5x^4+10x)y(x)=0.$$

Es ist also $g(x)=-5x^4+10x$ und $h(x)=0$

Bestimme eine Stammfunktion G von g:

$$\int(-5x^4+10x)\mathrm{d}x=-x^5+5x^2+C_1.$$

Setze also $G(x)=-x^5+5x^2$.

Die Lösungen der DGL lauten laut Satz 3.3.8

$$y=k(x)\mathrm{e}^{-G(x)}+C\mathrm{e}^{-G(x)},$$

wobei $k(x)=\int \mathrm{e}^{G(x)}h(x)\mathrm{d}x$ und $C\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Wegen $h(x)=0$ ist auch $k(x)=0$ und daher

$$y(x)=C\mathrm{e}^{x^5-5x^2}.$$

Bestimme nun C so, dass $y(2)=5$. Es muss also gelten

$$y(2)=C\cdot\mathrm{e}^{32-20}=C\mathrm{e}^{12}\overset{!}{=}5$$
$$C=5\mathrm{e}^{-12}.$$

Die Lösung des AWP lautet also $y(x)=5\mathrm{e}^{-12}\mathrm{e}^{x^5-5x^2}$.

Variante 2: Logarithmische Integration

Es gilt allgemein $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \mathrm{d}x = \ln(|f(x)|)$.

Forme die DGL wie folgt um:

$$\begin{aligned} \frac{y'(x)}{x^3 y(x) - 2y(x)} &= 5x \\ \frac{y'(x)}{(x^3-2)y(x)} &= 5x \\ \frac{y'(x)}{y(x)} &= 5x^4 - 10x \end{aligned}$$

Integration auf beiden Seiten liefert nun

$$\begin{aligned} \ln(|y(x)|) &= x^5 - 5x^2 + C \\ |y(x)| &= \mathrm{e}^{x^5 - 5x^2 + C} \\ y(x) &= \tilde{C}\mathrm{e}^{x^5 - 5x^2}, \end{aligned}$$

wobei $\tilde{C} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (dabei wurde das Vorzeichen beim Auflösen des Betrags damit berücksichtigt, dass $\tilde{C} < 0$ zugelassen wurde).

Die Konstante für die Lösung des AWPs berechnet sich wie in Variante 1.

Aufgabe 3 (*10 Punkte*) Geben Sie alle reellen Lösungen folgender Differentialgleichung an

$$y'' - 6y' + 9y = 18\sin(3x) + \mathrm{e}^{3x}.$$

Variante 1: Als erstes ist die homogene Gleichung zu lösen. Ihr charakteristisches Polynom lautet

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2.$$

Es hat offenbar die doppelte Nullstelle $\lambda_{1,2} = 3$.

Ein reelles Fundamentalsystem der Lösung der homogenen Gleichung lautet also

$$\mathrm{e}^{3x}, x\mathrm{e}^{3x}.$$

Um die inhomogene Gleichung zu lösen, kann man nach dem Superpositionsprinzip für jeden Summanden der rechten Seite getrennt vorgehen.

Beim Summanden $18\sin(3x)$ liegt keine Resonanz vor. Deshalb macht man den Ansatz $y_{p,1}(x) = a\sin(3x) + b\cos(3x)$.

Es gilt offenbar $y'_{p,1}(x) = 3a\cos(3x) - 3b\sin(3x)$ und $y''_{p,1}(x) = -9a\sin(3x) - 9b\cos(3x)$.

Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$\begin{aligned} -9a\sin(3x) - 9b\cos(3x) - 6(3a\cos(3x) - 3b\sin(3x)) + 9(a\sin(3x) + b\cos(3x)) &= 18\sin(3x) \\ -18a\cos(3x) + 18b\sin(3x) &= 18\sin(3x). \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert nun unmittelbar $a = 0, b = 1$, also $y_{p,1}(x) = \cos(3x)$.

Beim Summanden e^{3x} liegt Resonanz vor. Hier macht man daher den Ansatz $y_{p,2}(x) = ax^2\mathrm{e}^{3x}$.

Es gilt

$$\begin{aligned} y'_{p,2}(x) &= 3ax^2\mathrm{e}^{3x} + 2ax\mathrm{e}^{3x} \\ y''_{p,2}(x) &= 9ax^2\mathrm{e}^{3x} + 12ax\mathrm{e}^{3x} + 2a\mathrm{e}^{3x}. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} 9ax^2\mathrm{e}^{3x} + 12ax\mathrm{e}^{3x} + 2a\mathrm{e}^{3x} - 6(3ax^2\mathrm{e}^{3x} + 2ax\mathrm{e}^{3x}) + 9ax^2\mathrm{e}^{3x} &= \mathrm{e}^{3x} \\ 2a\mathrm{e}^{3x} &= \mathrm{e}^{3x} \\ a &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Somit gilt $y_{p,2}(x) = \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{3x}$.

Die allgemeine Lösung ergibt sich nun als Summe homogenen Lösung und $y_{p,1}$, $y_{p,2}$, also

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{3x} + c_2x\mathrm{e}^{3x} + \cos(3x) + \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{3x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Variante 2: Verwende bei dieser Lösung komplexe Ansätze.

Wie in der reellen Variante bestimmt man ein Fundamentalsystem der Gleichung.

Ebenfalls wie davor betrachtet man nach dem Superpositionsprinzip jeden Summanden der rechten Seite getrennt.

Es ist $18\sin(3x)$ der Imaginärteil von $18\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}$. Es liegt keine Resonanz vor, also macht man den komplexen Ansatz $y_{p,1} = a\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}$.

Es gilt offenbar $y'_{p,1} = 3\mathrm{i}a\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}$ und $y''_{p,1} = -9a\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}$.

Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$\begin{aligned} -9a\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - 18\mathrm{i}a\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + 9a\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} &= 18\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} \\ -18\mathrm{i}a\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} &= 18\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} \\ a &= \mathrm{i}. \end{aligned}$$

Also ist

$$y_{p,1} = \mathrm{i}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} = \mathrm{i}(\cos(3x) + \mathrm{i}\sin(3x)) = -\sin(3x) + \mathrm{i}\cos(3x).$$

Da $18\sin(3x)$ der Imaginärteil von $18\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}$ ist, erhält man die reelle Lösung, indem man wieder den Imaginärteil der komplexen Lösung nimmt. Dieser ist offenbar $\cos(3x)$.

Beim Summanden e^{3x} ist der komplexe und reelle Ansatz identisch, d.h. die restliche Lösung ist dieselbe wie im reellen Fall.

Bemerkung: Es ist zwar möglich die Lösung mittels des Variations-der-Konstanten-Verfahrens zu berechnen, aber dies ist deutlich aufwändiger und an dieser Stelle nicht ratsam!

Aufgabe 4 (*6 Punkte*) Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$y' = Ay = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y. \tag{1}$$

(a) (*4 Punkte*) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren. Geben Sie damit ein Fundamentalsystem für das Problem (1) an.

(b) (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems zur Anfangsbedingung $v = y(0) = (2, 0, 1)^T$.

(a) Wir bestimmen die Eigenwerte und berechnen (z.B. Entwicklungssatz oder Sarrus-Regel)

$$\det(A - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1). \tag{2}$$

Damit sind die Eigenwerte $\lambda_{0,1} = \mp 1$ (wobei der Eigenwert 1 zweifach ist).

Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 1$ ergeben sich durch Lösen von

$$(A - E_3)x = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \tag{3}$$

und damit folgt offensichtlich $x_1 = x_2$ und $x_3 \in \mathbb{R}$ beliebig. Somit ist $v_1 = (1, 1, 0)^T$ (oder ein skalares Vielfaches davon) ein Eigenvektor. Ein weiterer ist $v_2 = (0, 0, 1)^T$, es handelt sich also um eine diagonalisierbare Matrix. Natürlich ist auch jede Linearkombination von v_1, v_2 ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 (es gibt hier einen zweidimensionalen Eigenraum).

Der Eigenvektor zu $\lambda_0 = -1$ ergibt sich durch Lösen von

$$(A + E_3)x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \tag{4}$$

und damit folgt offensichtlich $x_1 = -x_2$ und $x_3 = 0$. Damit sind alle skalaren Vielfachen von $v_0 = (1, -1, 0)^T$ Eigenvektoren zum Eigenwert λ_0.

Da wir eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren gefunden haben, wissen wir (Satz 6.4.1), dass $\{v_0 e^{\lambda_0 x}, v_1 e^{\lambda_1 x}, v_2 e^{\lambda_1 x}\}$ ein Fundamentalsystem sind, also

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-x}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{x}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{x} \right\}. \tag{5}$$

(b) Wir können das Fundamentalsystem aus Teil (a) nutzen und müssen dann für $x = 0$ die Koeffizienten α_i mit $i = 0, 1, 2$ bestimmen, so dass sich

$$f(0) = \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

ergibt (dann stimmt die Linearkombination wegen der Existenz- und Eindeutigkeit der Lösung für alle $x \in \mathbb{R}$). Damit folgt sofort, dass $\alpha_2 = 1$ sein muss und weiter dass dann $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ sein müssen. Also ist die Lösung gegeben durch

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{x}. \tag{7}$$

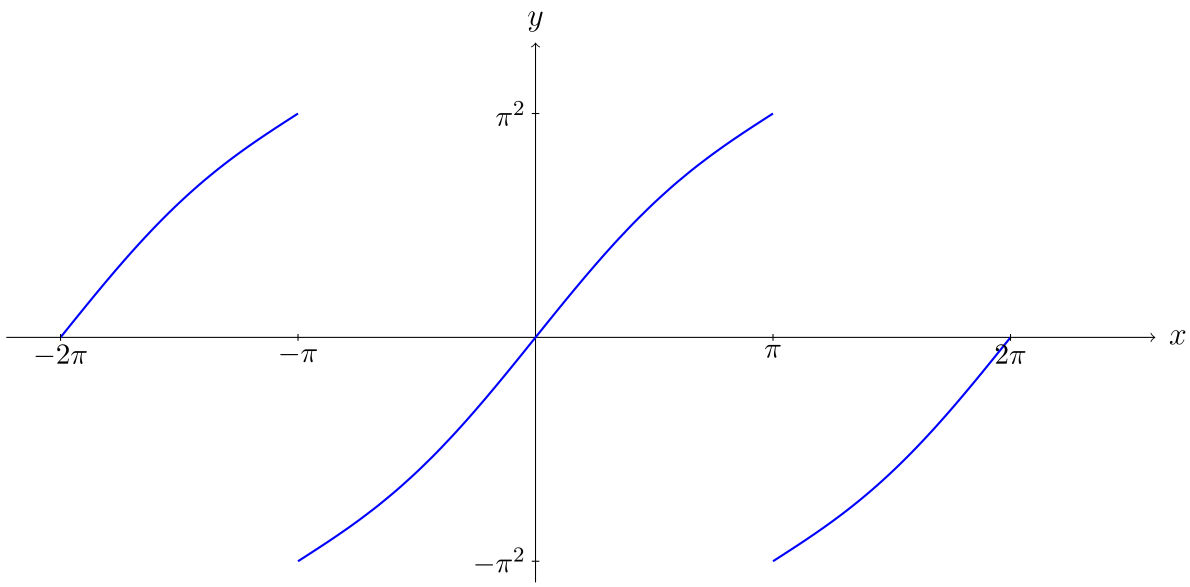
Aufgabe 5 (*10 Punkte*) Die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) := \pi x + \sin x, x \in [-\pi, \pi) \quad \text{und} \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

(a) (*1 Punkt*) Skizzieren Sie f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi)$.

(b) (*7 Punkte*) Entwickeln Sie f in eine reelle Fourierreihe.

(c) (*2 Punkte*) Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert der Fourierreihe.



(a)

(b) Zum Entwickeln der reellen Fourierreihe von $f(x) = \sin(x) + \pi x = f_1(x) + f_2(x)$ bietet es sich an die Fourierreihen von f_1 und f_2 zunächst separat zu bestimmen und danach zu kombinieren.

(1) Mit den bekannten Orthogonalitätsrelationen für f_1 sieht man sofort, dass

$$a_{1,n} = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}_0, \qquad b_{1,n} = \delta_{1,n} = \begin{cases} 1\,, n = 1 \\ 0\,, n \neq 1 \end{cases}, \ n \in \mathbb{N}_0.$$

(2) Weil $f_2(x)$ ungerade ist, gilt $a_{2,n} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(3) Die Koeffizienten $b_{2,n}$ für f_2 folgen durch einfache Integration sofort:

$$b_{2,n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \pi x \sin(nx) dx = \left[-\frac{x \cos(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx$$
$$= \left[-\frac{x \cos(nx)}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n}.$$

(4) Die Fourierreihe von f ist

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(2\pi \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \delta_{1,n} \right) \sin(nx).$$

(c) Die Funktion f ist stetig differenzierbar in den Intervallen $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$ mit endlichen links- bzw. rechtseitigen Grenzwerten sowohl für f als auch f' in allen Punkten $\{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Da die Funktion f insbesondere stetig ist in $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$, konvergiert die Fourierreihe in diesem Bereich also gegen $f(x)$. In den Punkten $\{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ hingegen macht f einen Sprung der Höhe $2\pi^2$, sodass sich der Grenzwert dort berechnet als

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to(2k+1)\pi-0} f(x) + \lim_{x\to(2k+1)\pi+0} f(x)\right) = \frac{1}{2}(\pi^2 - \pi^2) = 0.$$