Klausur zur Höheren Mathematik III

für **bau, ernen, fmt, geod, mach, medtech, tema, umw, verf, verk**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 4 Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- Es sind vollständige Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen abzugeben. Die Bearbeitung der Aufgaben erfolgt **auf gesondertem Papier. Jede Aufgabe ist auf einem neuen Blatt zu beginnen.**
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 12.10.2015 über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.
- Die Klausureinsicht findet voraussichtlich in der Woche vom 19.10.2015 bis 23.10.2015 statt. Details hierzu werden auf der Internet-Seite der Veranstaltung bekannt gegeben. (`http://mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Knarr-WS1415/`)

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:
Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.
Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **26.10.2015** bis **27.10.2015** jeweils zwischen 10:00 bis 12:00 Uhr mit Fernando Gaspoz (Raum V57.7.154) einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.
Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*8 Punkte*) Gegeben ist der Körper $K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 4y^2 \leqq 1, 1 \leqq z \leqq 3\}$.
Berechnen Sie der Ausfluss von $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch den Rand ∂K mit

$$g(x,y,z) = (x^3, 2xy^2, z).$$

Aufgabe 2 (*5 Punkte*) Lösen Sie folgendes Anfangswertproblem

$$\frac{y'}{(\ln(x)+1)y} = 1, \qquad x > 1$$
$$y(2) = 5.$$

Aufgabe 3 (*10 Punkte*) Geben Sie alle reellen Lösungen folgender Differentialgleichung an

$$y'' + 9y = 36\mathrm{e}^{3x} + 12\cos(3x).$$

Aufgabe 4 (*7 Punkte*) Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$y' = \begin{pmatrix} \tau & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y = Ay \tag{1}$$

mit einem Parameter $\tau \geqq 0$ und einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom der Matrix A an und bestimmen Sie die Eigenwerte sowie dazu gehörige Eigenvektoren von A.

(b) Bestimmen Sie im Fall $\boldsymbol{\tau = 1}$ die Lösung des Problems zu den Anfangsbedingungen

i) $v_1 = y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ii) $v_2 = y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) Geben Sie mit den Ergebnissen aus (a) und (b) ein Fundamentalsystem des homogenen Problems an (für alle $\tau \geqq 0$).

Aufgabe 5 (*10 Punkte*) Es ist die 2π-periodische Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ 0, & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \text{ oder } x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad \text{und} \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

gegeben.

(a) Skizzieren Sie f auf dem Intervall $[-\pi, 3\pi)$.

(b) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von f.

(c) An welchen Stellen $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Fourier-Reihe von f? Gegen welchen Wert konvergiert die Fourier-Reihe an diesen Stellen jeweils?

Hinweis: Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sin(x)\cdot\cos(y) &= \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)) \\ \cos(x)\cdot\cos(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)) \\ \sin(x)\cdot\sin(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)). \end{aligned}$$
