Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 8** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 9 – 13** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a\, x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\left(\cos(x)\right)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b)\, b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 17.10.2016 über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

VIEL ERFOLG!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **24.10.2016** bis **26.10.2016** einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*4 Punkte*) Die von einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix $A_\alpha \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und der Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 8 \\ 0 & 4 & -4 \\ -1 & \alpha & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das lineare Gleichungssystem $A_\alpha x = b$ genau eine Lösung?

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $A_\alpha^\intercal A_\alpha$ eine Diagonalmatrix?

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \, x \mapsto 2x + \mathrm{e}^{3(x-1)} .$$

(a) Geben Sie das Taylorpolynom $T_2(f, x, 1)$ an.

(b) Wir betrachten die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \, y \mapsto f^{-1}(y)$$

von f. Geben Sie das Taylorpolynom $T_1(f^{-1}, y, 3)$ an.

Aufgabe 3 (*11 Punkte*) Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei

$$g_{a,b} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} bx_1x_3 + ax_1x_2^2 \\ 8x_1^2x_2 + bx_3 \\ ax_1^2 + 2ax_2 + a\cos(x_3) \end{pmatrix}.$$

(a) Gegeben sei die Kurve K mit der Parametrisierung

$$C \colon \left[\tfrac{\pi}{2}, \pi\right] \to \mathbb{R}^3 \colon \; t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 1 \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\displaystyle\int_K g_{0,1}(x) \bullet \mathrm{d}\, x$.

(b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix und die Rotation von $g_{a,b}$.

(c) Für welche $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ besitzt $g_{a,b}$ ein Potential? Geben Sie für diese Werte ein Potential an.

Aufgabe 4 (*2 Punkte*) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = 2^n \begin{pmatrix} 1 & -\frac{n}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 (*2 Punkte*) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}(1+\mathrm{i})^k$$

konvergiert. Geben Sie deren Wert in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

Aufgabe 6 (*7 Punkte*) Bestimmen Sie alle globalen Minimalstellen und globalen Maximalstellen der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x, y) \mapsto x^3 - y^2$$

unter der Nebenbedingung $\frac{x^2}{2} + y^2 = 2$.

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Für jeden reellen Parameter t sei die Quadrik Q_t wie folgt gegeben:

$$Q_t := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2t x_1 x_2 + 1 = 0 \right\}.$$

(a) Geben Sie die Matrixbeschreibung der Quadrik Q_t in Abhängigkeit von t in der Form $x^\intercal A_t\, x + 2a^\intercal x + c = 0$ an.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A_t in Abhängigkeit von t.

(c) Bestimmen Sie den Typ der Quadrik Q_5.

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix F so, dass $D = F^\intercal A F$ eine Diagonalmatrix ist.

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studiengang:**

Aufgabe 9 (*3 Punkte*)

(a) Berechnen Sie den Betrag $r \in \mathbb{R}_0^+$ und das Argument $\varphi \in [0, 2\pi)$ der komplexen Zahl

$$z = (\sqrt{3} + \mathrm{i})^4.$$

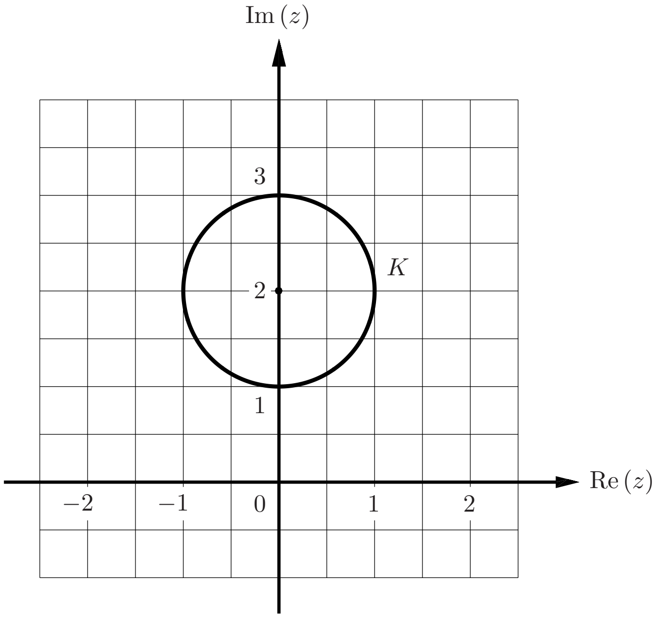
$r =$ ____ , $\varphi =$ ____

(b) Bestimmen Sie $s \in \mathbb{R}$ so, dass der rechts abgebildete Kreis K in der komplexen Zahlenebene durch die Menge

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} - 4\,\mathrm{Im}(z) = s\}$$

beschrieben wird.

$s =$ ____



Aufgabe 10 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie $w \in \mathbb{R}^3$ so, dass folgende Vektoren ein Rechtssystem bilden:

$$u = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad w = \boxed{}\,.$$

Berechnen Sie:

$|(u+v) \times (u-v)| =$ ____ , $\langle u - 3w \mid v + 2w \rangle - \langle v \times u \mid v \times w \rangle =$ ____

Aufgabe 11 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die Folgengrenzwerte:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{8n^4 + 2n^2 + n}{2n + n^3 + 3n^4} =$ ____

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{j=3}^{n} \frac{\sqrt{j} - \sqrt{j+1}}{\sqrt{j(1+j)}} =$ ____

Aufgabe 12 (*8 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie folgende Integrale:

$$\int \frac{\cos(\ln(1+\pi x))}{1+\pi x}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{}$$

$$\int (2x^2+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}\,x = \boxed{}$$

(b) Bestimmen Sie nach Polynomdivision die Partialbruchzerlegung von $\dfrac{x^4+2x^3+2}{x^3+2x^2}$:

$$\frac{x^4+2x^3+2}{x^3+2x^2} = \boxed{}$$

Berechnen Sie:

$$\int_1^2 \frac{x^4+2x^3+2}{x^3+2x^2}\,\mathrm{d}\,x = \boxed{}$$

Aufgabe 13 (*5 Punkte*) Für den Vektorraum $\mathbb{R}^{2\times 2}$ der reellen 2×2–Matrizen sind durch

$$B:\quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\qquad \text{und}$$

$$C:\quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

zwei Basen gegeben. Stellen Sie C_4 bezüglich der Basis B dar.

$$C_4 = \boxed{}\,B_1 + \boxed{}\,B_2 + \boxed{}\,B_3 + \boxed{}\,B_4\,.$$

Wir betrachten die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}\colon A \mapsto A + A^{\mathsf{T}}$. Bestimmen Sie:

$${}_B\mathrm{id}_C = \boxed{}\,,\quad {}_B\varphi_B = \boxed{}\,,\quad {}_B\varphi_C = \boxed{}$$

$$\dim(\mathrm{Bild}\,(\varphi)) = \boxed{}$$
