Klausur zur Höheren Mathematik I und II

für die Fachrichtungen: el, kyb, mecha, phys

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 4 eigenhändig handbeschriebene DIN-A4-Blätter.
  Insbesondere sind Taschenrechner, Handys und Computer nicht erlaubt.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- **Alle Aufgaben** zählen.
- Bei **allen Aufgaben** sind sämtliche Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab **15. Oktober 2016** über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, werden voraussichtlich ab dem **22. Oktober 2016** nähere Informationen bezüglich der mündlichen Nachprüfung auf der Homepage zu HM II–Steinwart

`http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Steinwart-SS16/`

finden.

Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*10 Punkte*)

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $P, P^{-1} \in M(2,2)$ und eine Diagonalmatrix $D \in M(2,2)$ so, dass $A = PDP^{-1}$.

(c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie anhand Ihrer Lösung, ob A invertierbar ist.

(d) Es sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, welche nicht die Nullabbildung ist und die Bedingung $T(T(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x})$ erfüllt. Bestimmen Sie einen Eigenwert von T.

Aufgabe 2 (*10 Punkte*)

(a) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{7^{n-1} - 3n^2}{9n^7 + 7^{n+1}}$ ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n \cdot (6^n + 4^n)}$ iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(7x+1)}{\mathrm{e}^{-x} - \cos(x)}$

(b) Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Reihen konvergieren. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n!)^2}$ ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4n^5+3}}{7n^4 + n^2 + 9^{-n}}$

(c) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^3 = -64\mathrm{i}$. Geben Sie diese sowohl in der Form $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ mit $r \in [0,\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ als auch in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

(d) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $\dfrac{1+\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}$.

(e) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar. Weiter sei f auf $(-\infty, 0]$ monoton fallend und auf $[0,\infty)$ monoton wachsend. Bestimmen Sie $f'(0)$.

Aufgabe 3 (*10 Punkte*)

(a) Betrachten Sie die quadratische Form

$$f(x,y,z) = 2x^2 - 2xy - 4xz + y^2 + 2yz + 3z^2 - 2x + 2z.$$

i) Schreiben Sie f in der Form $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x}+\mathbf{b}^\top\mathbf{x}$, wobei $\mathbf{x} = (x,y,z)^\top$, A eine reelle symmetrische Matrix ist und $\mathbf{b}$ ein konstanter Vektor.

ii) Bestimmen Sie den Punkt $(x,y,z)^\top$, an dem $\nabla f(x,y,z) = (0,0,0)^\top$ gilt.

(b) Es seien $\mathcal{B}_1 = \{(1,0)^\top, (0,1)^\top\}$ und $\mathcal{B}_2 = \{(3,1)^\top, (-2,1)^\top\}$ Basen von $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die beiden Basiswechselmatrizen (einmal für den Wechsel von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_2$ und einmal für den Wechsel von $\mathcal{B}_2$ nach $\mathcal{B}_1$).

(c) Es sei B eine 4×4-Matrix, die einen Eigenwert $\lambda = -1$ besitzt. Bestimmen Sie die Determinante von $B + E_4$.

(d) Es sei $T : M(2,2) \to M(2,2)$ eine lineare Abbildung mit

$$\ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| (a = b) \wedge (c = d) \right\}.$$

Bestimmen Sie den Rang von T.

(e) Gegeben sei die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 3/5 & a \\ -4/5 & b \end{pmatrix}.$$

Bestimmen sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass C orthogonal ist und geben Sie für diesen Fall C^{-1} an.

Aufgabe 4 (*10 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie die Gerade g, die durch den Punkt $(1,2,3)^\top$ verläuft und senkrecht auf der Ebene mit der Gleichung $2x+3y+4z = 6$ steht. In welchem Punkt schneidet g die Ebene mit der Gleichung $3x - 2y + z = 10$?

(b) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene E, die sowohl den Punkt $(1,2,1)^\top$ als auch die Gerade mit der Parameterdarstellung $\{(2-t, 1+3t, 5+4t)^\top : t \in \mathbb{R}\}$ enthält.

(c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten $A = (1,0,-3)^\top$, $B = (-2,1,1)^\top$, $C = (0,-1,-2)^\top$ in $\mathbb{R}^3$.

(d) Bestimmen Sie die Schnittmenge der beiden Ebenen mit den Gleichungen $x + y + z + 1 = 0$ und $x + 2y + 3z = -4$.

Aufgabe 5 (*10 Punkte*)

(a) Es sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}$.

i) Bestimmen Sie die Nullstellen und Extremstellen von f.

ii) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

(b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Potenzreihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{2+n}(x-3)^n.$$

(c) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

i) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x(\ln(x))^2}\,\mathrm{d}x$ ii) $\displaystyle\int_0^{\infty} 2x\mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x$ iii) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 6 (*10 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie diejenige Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x} = -2\sin(t)x^2,$$

für die gilt $x(0) = 2$.

(b) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \frac{4}{3}x^3 - x + y^2.$$

i) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von f und klassifizieren Sie diese.

ii) Bestimmen Sie den größten und den kleinsten Wert, den f auf der Menge

$$M = \left\{ (x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \tfrac{1}{4} \right\}$$

annimmt.

(c) Bestimmen Sie die Länge der Kurve $\gamma : [1,2] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ \frac{1}{3}(2t+1)^{3/2} \end{pmatrix}.$$

(d) Es sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2 - y \\ \mathrm{e}^z \\ 2x - z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\operatorname{div} g$.