Aufgabe 1 (*10 Punkte*)

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $P, P^{-1} \in M(2,2)$ und eine Diagonalmatrix $D \in M(2,2)$ so, dass $A = PDP^{-1}$.

(c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie anhand Ihrer Lösung, ob A invertierbar ist.

(d) Es sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, welche nicht die Nullabbildung ist und die Bedingung $T(T(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x})$ erfüllt. Bestimmen Sie einen Eigenwert von T.

Lösung:

(a) Das charakteristische Polynom von A ist gegeben durch

$$\det(A - \lambda E_3) = [(2-\lambda)(3-\lambda) - 2](1-\lambda) = [\lambda^2 - 5\lambda + 4](1-\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 4)(1 - \lambda).$$

Damit haben wir einen doppelten Eigenwert 1 und einen einfachen Eigenwert 4.

(b) Zunächst bestimmen wir die Eigenwerte von A:

$$\det(A - \lambda E_2) = (4-\lambda)(-5-\lambda) + 8 = \lambda^2 + \lambda - 12 \overset{!}{=} 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -4.$$

Weiter bestimmen wir zugehörige Eigenvektoren:

- $\lambda_1 = 3$. Dann ist die Lösungsmenge von

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -8 & -8 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

gegeben durch $\operatorname{span}\{(1,-1)^\top\}$. Also ist $v_1 = (1,-1)^\top$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 3.

- $\lambda_2 = -4$. Dann ist die Lösungsmenge von

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & | & 0 \\ -8 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 8 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben durch $\operatorname{span}\{(1,-8)^\top\}$, so dass ein zugehöriger Eigenvektor gegeben ist durch $v_2 = (1,-8)^\top$.

Damit haben wir

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -8 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Es ist

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & -5 & | & 4 \\ 2 & -4 & 2 & | & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 3 & -6 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2 \end{pmatrix}.$$

Anhand der dritten Zeile erkennen wir, dass die Lösungsmenge leer ist. Daher kann die Matrix A nicht invertierbar sein, da sonst die Lösungsmenge genau ein Element enthielte.

(d) T ist nach Definition eine Projektion. Daher kann T nur die Eigenwerte 1 oder 0 besitzen. Da T nicht die Nullabbildung ist, muss T einen Eigenwert 1 haben.

Alternative: Da T nicht die Nullabbildung ist, gibt es ein $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, so dass $T(\mathbf{x}) = v \neq 0$. Damit ist aber nach Voraussetzung

$$Tv = T(T(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x}) = v.$$

Da $v \neq 0$, ist v ein Eigenvektor von T zum Eigenwert 1.

Aufgabe 2 (*10 Punkte*)

(a) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

i) $\lim_{n\to\infty} \frac{7^{n-1} - 3n^2}{9n^7 + 7^{n+1}}$ ii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n \cdot (6^n + 4^n)}$ iii) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(7x+1)}{\mathrm{e}^{-x} - \cos(x)}$

(b) Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Reihen konvergieren. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n!)^2}$ ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4n^5+3}}{7n^4 + n^2 + 9^{-n}}$

(c) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^3 = -64\mathrm{i}$. Geben Sie diese sowohl in der Form $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ mit $r \in [0,\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ als auch in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

(d) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $\frac{1+\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}$.

(e) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar. Weiter sei f auf $(-\infty, 0]$ monoton fallend und auf $[0,\infty)$ monoton wachsend. Bestimmen Sie $f'(0)$.

Lösung:

(a) i) Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7^{n-1} - 3n^2}{9n^7 + 7^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{7^{-1} - \frac{3n^2}{7^n}}{\frac{9n^7}{7^n} + 7} = \frac{7^{-1} - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2}{7^n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9n^7}{7^n}\right) + 7} = \frac{7^{-1} - 0}{0 + 7} = \frac{1}{49}.$$

ii) Es ist

$$\sqrt[n]{n \cdot (6^n + 4^n)} \geqq \sqrt[n]{n \cdot 6^n} = 6 \cdot \sqrt[n]{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 6,$$
$$\sqrt[n]{n \cdot (6^n + 4^n)} \leqq \sqrt[n]{2n \cdot 6^n} = 6 \cdot \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 6.$$

Nach dem Einschnürungssatz folgt dann, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n \cdot (6^n + 4^n)} = 6.$$

iii) Wir verwenden die Regel von l'Hospital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(7x+1)}{\mathrm{e}^{-x} - \cos(x)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{7}{7x+1}}{-\mathrm{e}^{-x} + \sin(x)} = -7.$$

(b) i) Wir schreiben $a_n = \frac{n^{2n}}{(n!)^2}$ und betrachten den Quotienten

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^{2n+2}}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{n^{2n}} = \frac{(n+1)^{2n} \cdot (n+1)^2 \cdot (n!)^2}{(n+1)^2 \cdot (n!)^2 \cdot n^{2n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2$$
$$\xrightarrow{n\to\infty} \mathrm{e}^2 > 1.$$

Daher ist die Reihe nach dem Quotientenkriterium divergent.

Alternative: Wir sehen, dass $a_n = \frac{n^{2n}}{(n!)^2} = \left(\frac{n^n}{n!}\right)^2 = \left(\frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \cdots \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{1}\right)^2 \geqq n^2$. Damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge und die Reihe divergiert.

ii) Wir schreiben $a_n = \frac{\sqrt{4n^5+3}}{7n^4+n^2+9^{-n}}$. Es ist

$$0 \leqq a_n \leqq \frac{\sqrt{4n^5+3n^5}}{7n^4} = \frac{1}{7}\sqrt{7} \cdot \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{7}\sqrt{7} \cdot \frac{1}{n^{3/2}}\right) = \frac{1}{7}\sqrt{7} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ ist konvergent. Daher konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Majorantenkriterium.

(c) Es ist $-64\mathrm{i} = 64\mathrm{e}^{\frac{3}{2}\pi\mathrm{i}}$. Damit haben wir die drei Lösungen

$$\begin{aligned} z_1 &= 4\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\pi\mathrm{i}} = 4\mathrm{i}, \\ z_2 &= 4\mathrm{e}^{\frac{7}{6}\pi\mathrm{i}} = -2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}, \\ z_3 &= 4\mathrm{e}^{\frac{11}{6}\pi\mathrm{i}} = 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}. \end{aligned}$$

(d) Es ist

$$\frac{1+\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}} = \frac{(1+\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})}{9+4} = \frac{1+5\mathrm{i}}{13}.$$

Damit ist der Realteil gegeben durch $\frac{1}{13}$ und der Imaginärteil durch $\frac{5}{13}$.

(e) Unter den gegebenen Voraussetzungen hat f in 0 ein lokales Minimum. Da f in 0 differenzierbar ist, muss gelten $f'(0) = 0$.

Alternative: Da f auf $[0,\infty)$ monoton wächst, gilt $f'(x) \geqq 0$ für $x \in (0,\infty)$. Analog ist $f'(x) \leqq 0$ für $x \in (-\infty, 0)$. Wegen der Stetigkeit von f' ist dann

$$0 \leqq \lim_{n\to\infty} f'(-1/n) = f(0) = \lim_{n\to\infty} f'(1/n) \leqq 0.$$

Also ist $f'(0) = 0$.

Aufgabe 3 (*10 Punkte*)

(a) Betrachten Sie die quadratische Form

$$f(x,y,z) = 2x^2 - 2xy - 4xz + y^2 + 2yz + 3z^2 - 2x + 2z.$$

i) Schreiben Sie f in der Form $\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} + \mathbf{b}^\top \mathbf{x}$, wobei $\mathbf{x} = (x,y,z)^\top$, A eine reelle symmetrische Matrix ist und $\mathbf{b}$ ein konstanter Vektor.

ii) Bestimmen Sie den Punkt $(x,y,z)^\top$, an dem $\nabla f(x,y,z) = (0,0,0)^\top$ gilt.

(b) Es seien $\mathcal{B}_1 = \{(1,0)^\top, (0,1)^\top\}$ und $\mathcal{B}_2 = \{(3,1)^\top, (-2,1)^\top\}$ Basen von $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die beiden Basiswechselmatrizen (einmal für den Wechsel von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_2$ und einmal für den Wechsel von $\mathcal{B}_2$ nach $\mathcal{B}_1$).

(c) Es sei B eine 4×4-Matrix, die einen Eigenwert $\lambda = -1$ besitzt. Bestimmen Sie die Determinante von $B + E_4$.

(d) Es sei $T : M(2,2) \to M(2,2)$ eine lineare Abbildung mit

$$\ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, (a = b) \wedge (c = d) \right\}.$$

Bestimmen Sie den Rang von T.

(e) Gegeben sei die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 3/5 & a \\ -4/5 & b \end{pmatrix}.$$

Bestimmen sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass C orthogonal ist und geben Sie für diesen Fall C^{-1} an.

Lösung:

(a) i) Es ist

$$f(x,y,z) = \mathbf{x}^\top \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}^\top \mathbf{x}.$$

ii) Es ist

$$\nabla f(x,y,z) = 2A\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

so dass wir zur Bestimmung der kritischen Stellen von f das folgende inhomogene LGS zu lösen haben:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 & | & 2 \\ -2 & 2 & 2 & | & 0 \\ -4 & 2 & 6 & | & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & | & 1 \\ -2 & 2 & 2 & | & 0 \\ -2 & 1 & 3 & | & -1 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir $z = 0$, $y = 1$ und durch Einsetzen in die erste Zeile $x = 1$. Die eindeutige kritische Stelle ist somit $(1,1,0)^\top$.

(b) Es ist

$$_{\mathcal{B}_1}\mathrm{M}^{\mathrm{id}}_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad _{\mathcal{B}_2}\mathrm{M}^{\mathrm{id}}_{\mathcal{B}_1} = \left(_{\mathcal{B}_1}\mathrm{M}^{\mathrm{id}}_{\mathcal{B}_2}\right)^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) Da $\lambda = -1$ ein Eigenwert von B ist, gilt

$$0 = \det(B - \lambda E_4) = \det(B - (-1)E_4) = \det(B + E_4).$$

Alternative: Es sei v ein Eigenvektor von B zum Eigenwert -1. Dann gilt

$$(B + E_4)v = Bv + E_4 v = -v + v = 0.$$

Daher hat $B + E_4$ einen Eigenwert 0, so dass die Determinante von $B + E_4$ ebenfalls gleich Null ist (da die Determinante das Produkt der Eigenwerte ist).

(d) Die Elemente des Kerns von T haben die Form

$$\begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad a, c \in \mathbb{R}.$$

Der Kern von T ist damit ein zweidimensionaler Unterraum von $M(2,2)$. Da $M(2,2)$ ein vierdimensionaler Raum ist, muss nach der Dimensionsformel gelten

$$\dim M(2,2) = \dim\ker(T) + \operatorname{rang}(T) \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rang}(T) = 4 - 2 = 2.$$

(e) Mit einer der Wahlen $(a, b) = (4/5, 3/5)$ bzw. $(a, b) = (-4/5, -3/5)$ ist die Matrix C orthogonal.

Die Inverse einer orthogonalen Matrix ist gerade die transponierte Matrix, so dass

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (*10 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie die Gerade g, die durch den Punkt $(1,2,3)^\top$ verläuft und senkrecht auf der Ebene mit der Gleichung $2x+3y+4z=6$ steht. In welchem Punkt schneidet g die Ebene mit der Gleichung $3x-2y+z=10$?

(b) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene E, die sowohl den Punkt $(1,2,1)^\top$ als auch die Gerade mit der Parameterdarstellung $\{(2-t,1+3t,5+4t)^\top : t\in\mathbb{R}\}$ enthält.

(c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten $A=(1,0,-3)^\top$, $B=(-2,1,1)^\top$, $C=(0,-1,-2)^\top$ in $\mathbb{R}^3$.

(d) Bestimmen Sie die Schnittmenge der beiden Ebenen mit den Gleichungen $x+y+z+1=0$ und $x+2y+3z=-4$.

Lösung:

(a) Es ist $g=\{(1,2,3)^\top+t(2,3,4)^\top : t\in\mathbb{R}\}$. Den Schnittpunkt mit der Ebene finden wir durch Einsetzen:

$$3(1+2t)-2(2+3t)+(3+4t)\stackrel{!}{=}10 \quad\Leftrightarrow\quad 2+4t=10 \quad\Leftrightarrow\quad t=2.$$

Dann ist der Schnittpunkt gegeben durch $(1,2,3)^\top+2\cdot(2,3,4)^\top=(5,8,11)^\top$.

(b) Da die Gerade in E liegt, haben wir bereits einen Stützvektor von E, nämlich $(2,1,5)^\top$. Der Richtungsvektor $v_1=(-1,3,4)^\top$ der Gerade ist auch ein Spannvektor von E. Ein zweiter Spannvektor ist gegeben durch

$$v_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-4\end{pmatrix}.$$

Die beiden Vektoren v_1 und v_2 sind linear unabhängig, daher ergibt das Kreuzprodukt der beiden einen Vektor, der senkrecht auf E steht:

$$v_1\times v_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\1\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16\\-8\\2\end{pmatrix}.$$

Die Hesse-Normalform von E ist damit

$$\left\{(x,y,z)^\top\in\mathbb{R}^3 : \frac{8x+4y-z-15}{9}=0\right\}.$$

(c) Der Flächeninhalt des Dreiecks ist gegeben durch

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-2-1\\1-0\\1+3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0-1\\-1-0\\-2+3\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}5\\-1\\4\end{pmatrix}\right|$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{25+1+16} = \frac{1}{2}\sqrt{42}.$$

Alternative: Wir bestimmen den Lotfußpunkt S von C auf die Seite $\overline{AB}$.

Bezeichnen wir mit g die Gerade durch A und B, so ist

$$g := \{(1,0,-3)^\top + r\cdot(-3,1,4)^\top \,:\, r\in\mathbb{R}\}.$$

Die Ebene E, die C enthält und senkrecht zu g steht, hat die Gleichung $3x_1 - x_2 - 4x_3 = 9$. Der gesuchte Lotfußpunkt S ist der Schnittpunkt von g und E. Diesen bestimmen wir durch die Gleichung

$$3(1-3r) - r - 4(-3+4r) \overset{!}{=} 9 \quad\Leftrightarrow\quad -26r = -6 \quad\Leftrightarrow\quad r = \frac{3}{13} \quad\Rightarrow\quad S = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}4\\3\\27\end{pmatrix}.$$

Die Höhe des Dreiecks auf der Seite $\overline{AB}$ ist damit gegeben durch

$$|\overrightarrow{CS}| = \frac{1}{13}\left|\begin{pmatrix}4\\16\\-1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{13}\cdot\sqrt{273} = \frac{1}{13}\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{21}.$$

Weiter ist $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{26} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{13}$. Damit ist der Flächeninhalt des Dreiecks gegeben durch

$$\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CS}| = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{21} = \frac{1}{2}\sqrt{42}.$$

(d) Der Schnitt der beiden Ebenen ist gerade die Lösungsmenge des (unterbestimmten) inhomogenen LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&-1\\1&2&3&-4\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&-1\\0&1&2&-3\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&2\\0&1&2&-3\end{array}\right)$$

Setzen wir $z = t$, so ergibt sich $y = -3-2t$, $x = 2+t$. Damit ist die Schnittmenge der beiden Ebenen gegeben durch

$$\{(2+t, -3-2t, t)^\top \,:\, t\in\mathbb{R}\}.$$

Aufgabe 5 (*10 Punkte*)

(a) Es sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}$.

i) Bestimmen Sie die Nullstellen und Extremstellen von f.

ii) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

(b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Potenzreihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{2+n}(x-3)^n.$$

(c) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

i) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x(\ln(x))^2}\,\mathrm{d}x$ ii) $\displaystyle\int_0^{\infty} 2x\mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x$ iii) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x$

Lösung:

(a) i) – Nullstellen: $f(x) \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^3 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$.

– Extremstellen: $f'(x) = 8x - \frac{1}{x^2} \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8x^3 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$.
Um zu prüfen, ob es sich bei $x = \frac{1}{2}$ tatsächlich um eine Extremstelle handelt, berechnen wir $f''(x) = 8 + \frac{2}{x^3}$. Da $f''(2) > 0$, hat f an dieser Stelle ein Extremum.

ii) Es ist

$$T_2(f,1,x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 = 5 + 7(x-1) + 5(x-1)^2.$$

(Ausmultipliziert lautet das Polynom $T_2(f,1,x) = 5x^2 - 3x + 3$.)

(b) Wir schreiben $a_n = \frac{1+2^n}{2+n}$. Zunächst bestimmen wir den Konvergenzradius der Potenzreihe:

$$\varrho = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1} = \frac{1}{2}.$$

Damit konvergiert die Potenzreihe absolut für alle $x \in (5/2, 7/2)$ und divergiert für alle $x \in \mathbb{R} \setminus [5/2, 7/2]$. Es bleiben nun noch die Randpunkte zu überprüfen:

- $x = 5/2$. Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{2+n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{\frac{1}{2^n}+1}{2+n}}_{=:b_n}.$$

Da die Nullfolge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist (Zähler fällt monoton, Nenner wächst monoton), konvergiert die Folge nach dem Leibnizkriterium.

- $x = 7/2$. Dann ist
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{2+n}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2^n}+1}{2+n}.$$
Da
$$\frac{\frac{1}{2^n}+1}{2+n} \geqq \frac{1}{3n}$$
und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$ divergiert, divergiert auch die Potenzreihe für $x = 7/2$ nach dem Minorantenkriterium.

Insgesamt finden wir also, dass die Potenzeihe konvergiert genau dann, wenn $x \in [5/2, 7/2)$.

(c) i) Mit der Substitution $y = \ln(x)$ erhalten wir formal $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x = x\mathrm{d}y$. Die untere Integralgrenze wird zu $\ln(\mathrm{e}) = 1$ und die obere zu $\ln(\mathrm{e}^2) = 2$. Damit ist
$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x(\ln(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = \left[-\frac{1}{y}\right]_1^2 = -\frac{1}{2}+\frac{1}{1} = \frac{1}{2}.$$

ii) Hier verwenden wir partielle Integration. Es ist
$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} 2x\mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty}\left(\left[-\frac{2}{3}x\mathrm{e}^{-3x}\right]_0^b - \int_0^b -\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \lim_{b\to\infty}\left(\left[-\frac{2}{3}b\mathrm{e}^{-3b}\right] - \left[\frac{2}{9}\mathrm{e}^{-3x}\right]_0^b\right)\\ &= 0 - \lim_{b\to\infty}\left[\frac{2}{9}\mathrm{e}^{-3b} - \frac{2}{9}\right] = \frac{2}{9}.\end{aligned}$$

iii) Wir führen zunächst eine Partialbruchzerlegung für den Integranden durch. Es soll gelten
$$\frac{x}{(x+2)^2} \overset{!}{=} \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = A(x+2)+B.$$
Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich sofort $A = 1$ und damit $B = -2$. Daher ist
$$\int \frac{x}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2}\right)\mathrm{d}x = \left[\ln|x+2| + \frac{2}{x+2}\right].$$
Bemerkung: Zulässig sind auch die folgenden Darstellungen der Lösung:
$$\ln|x+2| + \frac{2}{x+2} + c, \qquad \left[\ln|x+2| + \frac{2}{x+2} + c\right], \qquad \left[\ln|x+2| + \frac{2}{x+2}\right] + c,$$
Alternative: Die Partialbruchzerlegung lässt sich auch durch geschicktes Erweitern des Zählers finden:
$$\frac{x}{(x+2)^2} = \frac{x+2-2}{(x+2)^2} = \frac{x+2}{(x+2)^2} - \frac{2}{(x+2)^2} = \frac{1}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2}.$$
Die restliche Rechnung verläuft wie oben.

Alternative: Die Aufgabe lässt sich auch mit partieller Integration lösen:

$$\int \frac{x}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x = \int x \cdot \frac{1}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-x \cdot \frac{1}{x+2}\right] - \int -\frac{1}{(x+2)}\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[-\frac{x}{x+2} + \ln|x+2|\right]$$

(Man beachte, dass diese Lösung nicht im Widerspruch zur oben gefundenen Lösung steht. Denn es ist

$$\ln|x+2| + \frac{2}{x+2} - \left(-\frac{x}{x+2} + \ln|x+2|\right) = \frac{x+2}{x+2} = 1.$$

Damit unterscheiden sich die beiden Ausdrücke nur durch eine Konstante, nämlich 1, und sind damit Repräsentanten derselben Äquivalenzklasse von Stammfunktionen.)

Aufgabe 6 (*10 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie diejenige Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x} = -2\sin(t)x^2,$$

für die gilt $x(0) = 2$.

(b) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \frac{4}{3}x^3 - x + y^2.$$

i) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von f und klassifizieren Sie diese.

ii) Bestimmen Sie den größten und den kleinsten Wert, den f auf der Menge

$$M = \left\{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}\right\}$$

annimmt.

(c) Bestimmen Sie die Länge der Kurve $\gamma : [1, 2] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ \frac{1}{3}(2t+1)^{3/2} \end{pmatrix}.$$

(d) Es sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2 - y \\ \mathrm{e}^z \\ 2x - z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\operatorname{div} g$.

Lösung:

(a) Hierbei handelt es sich um eine separierbare Differentialgleichung. Es ist

$$\begin{aligned}
&& \dot{x}(t) &= -2\sin(t)x(t)^2 \\
\Leftrightarrow && \frac{\dot{x}}{x(t)^2} &= -2\sin(t) && \Big| \int \ldots \mathrm{d}t \\
\Leftrightarrow && -\frac{1}{x(t)} &= 2\cos(t) + c \\
\Leftrightarrow && x(t) &= -\frac{1}{2\cos(t) + c}.
\end{aligned}$$

Nun ist noch die Konstante c zu bestimmen:

$$2 \stackrel{!}{=} x(0) = -\frac{1}{2+c} \quad \Leftrightarrow \quad c = -\frac{5}{2}.$$

Damit ist

$$x(t) = -\frac{1}{2\cos(t) - \frac{5}{2}}.$$

(b) i) Um die kritischen Stellen von f zu bestimmen setzen wir

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (4x^2-1, 2y)^\top \stackrel{!}{=} (0,0)^\top \quad \Leftrightarrow \quad y = 0 \wedge \left(x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}\right).$$

Dies ergibt die kritischen Stellen $\left(\frac{1}{2}, 0\right)^\top$ und $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)^\top$.

Zur Klassifikation betrachten wir die Hesse-Matrix von f. Es ist

$$\mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 8x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\mathrm{H}\, f(1/2, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

positiv definit (besitzt die beiden positiven Eigenwerte 2 und 4). Daher liegt in $(1/2,0)^\top$ ein lokales Minimum vor.

Weiter ist

$$\mathrm{H}\, f(-1/2, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

indefinit (die Matrix besitzt den positiven Eigenwert 2 und den negativen Eigenwert -4). Daher liegt in $(-1/2,0)^\top$ ein Sattelpunkt vor.

ii) Wir schreiben $g(x,y) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{1}{4}$. Es ist leicht zu sehen, dass $\nabla g(x,y) \neq (0,0)^\top$ für alle $(x,y) \in M$.

Nach der Methode von Lagrange muss an den jeweiligen Extremalstellen gelten

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) + \lambda \nabla g(x,y) &= 0, \\ g(x,y) &= 0. \end{aligned}$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Daher lösen wir das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4x^2 - 1 + 2\lambda\left(x - \tfrac{1}{2}\right) &= 0, \\ 2y + 2\lambda y &= 0, \\ \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 &= \tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

Aus der zweiten Zeile ergibt sich, dass gelten muss $y = 0$ oder $\lambda = -1$.

- Falls $y = 0$, ergibt sich aus der Nebenbedingung (dritte Zeile), dass $x = 0$ oder $x = 1$. In beiden Fällen ist die erste Gleichung dann für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ erfüllbar.
- Falls $\lambda = -1$ ist, so wird die erste Gleichung zu

$$4x^2 - 1 - 2x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 - 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2x-1)x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \vee x = 0.$$

  Im Fall $x = 0$ ergibt sich dann mit der Nebenbedingung $y = 0$. Im Fall $x = \frac{1}{2}$ ergibt sich $y = \frac{1}{2}$ oder $y = -\frac{1}{2}$.

Um das Maximum bzw. das Minimum von f auf M zu bestimmen, müssen wir nun die Funktionswerte an den vier gefundenen Stellen vergleichen:

$$f(0,0) = 0,\ f(1,0) = \frac{1}{3},\ f(1/2, 1/2) = f(1/2, -1/2) = -\frac{1}{12}.$$

Damit ist $\max_{(x,y) \in M} f(x,y) = \frac{1}{3}$ und $\min_{(x,y) \in M} f(x,y) = -\frac{1}{12}$.

Alternative: Wir können die Nebenbedingung auflösen, so dass $y^2 = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$. Die Bedingung, dass $y^2 \geqq 0$ sein soll, führt dazu, dass $x \in [0,1]$.

Wir haben nun also die Aufgabe, das Minimum von $F(x) = \frac{4}{3}x^3 - x + \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4}{3}x^3 - x^2$ auf dem Intervall $[0,1]$ zu finden.

Es ist $F'(x) = 4x^2 - 2x \overset{!}{=} 0 \ \Leftrightarrow \ x \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$. Durch Vergleichen mit dem zweiten Randwert $x = 1$ erhalten wir

$$F(0) = 0, \quad F\left(\tfrac{1}{2}\right) = -\tfrac{1}{12}, \quad F(1) = \tfrac{1}{3},$$

so dass schließlich das Maximum (Minimum) von f auf M gegeben ist durch $\frac{1}{3}$ $\left(-\frac{1}{12}\right)$.

(c) Die Kurve ist stetig differenzierbar, daher kann die Länge L_γ berechnet werden durch

$$\begin{aligned} L_\gamma &= \int_1^2 \|\dot{\gamma}(t)\| \,\mathrm{d}t = \int_1^2 \sqrt{t^2 + 2t + 1} \,\mathrm{d}t = \int_1^2 \sqrt{(t+1)^2} \,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^2 (t+1) \,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t^2 + t\right]_1^2 = 2 + 2 - \frac{1}{2} - 1 = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

(d) Es ist

$$\operatorname{div} g(x,y,z) = \partial_x(3x^2 - y) + \partial_y(\mathrm{e}^z) + \partial_z(2x - z) = 6x - 1.$$