Aufgabe 1 (*3 Punkte*) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$y' = \frac{e^{-y}}{2}\cos(x), \quad y(0) = 1.$$

Sei $y : I \to \mathbb{R}$ die maximale Lösung des gegebenen Anfangswertproblems (diese existiert eindeutig aufgrund des picard–lindelöfschen Satzes!). Wir erhalten dann mittels Separation der Variablen, dass

$$e^y \, dy = \frac{1}{2}\cos(x)\, dx$$
$$\int e^y \, dy = \frac{1}{2}\int \cos(x)\, dx$$

und damit

$$e^{y(x)} = \frac{1}{2}\sin(x) + c \quad (x \in I)$$

für ein $c \in \mathbb{R}$. Also

$$y(x) = \log(\frac{1}{2}\sin(x) + c) \quad (x \in I)$$

und

$$1 = y(0) = \log(c) \quad \text{bzw.} \quad c = e.$$

Wir erhalten also

$$y(x) = \log(\frac{1}{2}\sin(x) + e) \quad (x \in I).$$

Aufgabe 2 (*8 Punkte*) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der folgenden Differentialgleichung:

$$y'' - y' - 2y = 2x + e^{2x}.$$

In einem ersten Schritt löst man die homogene Gleichung $y'' - y' - 2y = 0$. Das charakteristische Polynom p dieser Differentialgleichung lautet

$$p = X^2 - X - 2 = (X-2)(X+1).$$

und hat die Nullstellen 2 und -1. Also lautet die allgemeine homogene Lösung f_h:

$$f_h(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

In einem zweiten Schritt bestimmt man nun irgendeine beliebige (partikuläre) Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung – und zwar entweder durch einen Ansatz nach Art der rechten Seite (Variante 1) oder durch Variation der Konstanten (Variante 2).

Variante 1: partikuläre Lösung durch Ansatz nach Art der rechten Seite
Aufgrund des Superpositionsprinzips bekommt man eine partikuläre Lösung f_p von $y'' - y' - 2y = 2x + e^{2x}$, indem man eine partikuläre Lösung $f_{p\,1}$ von $y'' - y' - 2y = 2x = h_1(x)$ und eine partikuläre Lösung $f_{p\,2}$ von $y'' - y' - 2y = e^{2x} = h_2(x)$ bestimmt und diese beiden addiert: $f_p = f_{p\,1} + f_{p\,2}$.

- Zunächst zu $y'' - y' - 2y = 2x = h_1(x)$! Weil 0 keine Nullstelle von p ist (keine Resonanz), machen wir den Ansatz

  $$f_{p\,1}(x) = (ax+b)\,x^0\,e^{0x} = ax + b.$$

  Setzt man diesen Ansatz in die Differentialgleichung ein, so erhält man

  $$0 - a - 2(ax+b) = h_1(x) = 2x.$$

  Also $a = -1$ und $b = \frac{1}{2}$ (Koeffizientenvergleich!) und damit $f_{p\,1}(x) = -x + \frac{1}{2}$.

- Jetzt zu $y'' - y' - 2y = e^{2x} = h_2(x)$! Weil 2 eine einfache Nullstelle von p ist (Resonanz), machen wir den Ansatz

  $$f_{p\,2}(x) = c\,x^1\,e^{2x} = cxe^{2x}.$$

  Zweimaliges Ableiten ergibt

  $$\begin{aligned} f'_{p\,2}(x) &= (c + 2cx)e^{2x}, \\ f''_{p\,2}(x) &= (4c + 4cx)e^{2x}. \end{aligned}$$

Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$e^{2x} = h_2(x) = \big(4c + 4cx - c - 2cx - 2cx\big)e^{2x} = 3ce^{2x}$$

und damit $c = \frac{1}{3}$. Also $f_{p\,2}(x) = \frac{1}{3}xe^{2x}$.

Insgesamt erhalten wir $f_p(x) = f_{p\,1}(x) + f_{p\,2}(x) = -x + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}xe^{2x}$.

Variante 2: partikuläre Lösung durch Variation der Konstanten

Die Wronskimatrix $M(x)$ zu f_1, f_2 und deren Inverse $M(x)^{-1}$ lauten:

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{-x} \\ 2e^{2x} & -e^{-x} \end{pmatrix}, \quad M(x)^{-1} = \frac{1}{\det M(x)} \operatorname{adj}(M(x)) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-2x} \\ 2e^{x} & -e^{x} \end{pmatrix}.$$

Aufgrund eines Satzes aus der Vorlesung ist eine partikuläre Lösung gegeben durch $f_p(x) = c_1(x)f_1(x) + c_2(x)f_2(x)$, wobei c_1, c_2 Funktionen sind so, dass

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = M(x)^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ h(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-2x} \\ 2e^{x} & -e^{x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2x + e^{2x} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 + 2xe^{-2x} \\ -e^{3x} - 2xe^{x} \end{pmatrix}.$$

Also gilt (mit Integrationskonstanten $c_{1\,0}$, $c_{2\,0}$):

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}xe^{-2x} - \frac{1}{6}e^{-2x} + c_{1\,0}, \\ c_2(x) &= -\frac{1}{9}e^{3x} - \frac{2}{3}xe^{x} + \frac{2}{3}e^{x} + c_{2\,0} \end{aligned}$$

(partielle Integration!). Wählt man die Integrationskonstanten $c_{1\,0}$, $c_{2\,0}$ beide gleich 0, so erhält man eine partikuläre Lösung f_p mit

$$\begin{aligned} f_p(x) = c_1(x)f_1(x) + c_2(x)f_2(x) &= \frac{1}{3}xe^{2x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{6} - \frac{1}{9}e^{2x} - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \\ &= -\frac{1}{9}e^{2x} - x + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}xe^{2x}. \end{aligned}$$

(Diese partikuläre Lösung unterscheidet sich von der in Variante 1 durch die Lösung $x \mapsto -\frac{1}{9}e^{2x}$ der homogenen Gleichung. Durch entsprechend andere Wahl der Integrationskonstanten $c_{0\,1}, c_{0\,2}$ erhält man die partikuläre Lösung aus Variante 1.)

In einem dritten und letzten Schritt muss man schließlich noch die oben bestimmte allgemeine homogene Lösung und die oben bestimmte partikuläre Lösung addieren:

$$\begin{aligned} f(x) = f_h(x) + f_p(x) &= f_h(x) + f_{p\,1}(x) + f_{p\,2}(x) \\ &= c_1e^{2x} + c_2e^{-x} - x + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}xe^{2x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

um die gesuchte allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu bekommen.

Aufgabe 3 (*9 Punkte*) Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$y' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix} y.$$

Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems zur Anfangsbedingung

$$v = y(0) = (1,0,0)^T$$

.

Analog zu Beispiel 6.3.5. berechnen wir den Vektor

$$Av = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

der offenbar linear unabhängig von v ist. Weiter gilt

$$A^2v = A(Av) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Wir prüfen diese Vektoren auf lineare Abhängigkeit, und schreiben dazu die Vektoren v, Av und A^2v zeilenweise in eine Matrix um durch elementare Zeilenumformungen in der letzten Zeile eine Nullzeile zu erzeugen.Es erweist sich als zweckmäßig, eine zusätzliche Spalte mit den Einträgen v, Av, A^2v einzufügen, und auf diese alle Eliminationsschritte des Gauß-Algorithmus anzuwenden. Wir wenden den Gauß-Algorithmus an auf die Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 0 & 0 & v \\ -1 & 6 & 3 & Av \\ 1 & 6 & 3 & A^2v \end{array}\right]$$

Im ersten Schritt erhalten wir

$$\begin{array}{r} \\ Z_2 + Z_1 : \\ Z_3 - Z_1 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 0 & 0 & v \\ 0 & 6 & 3 & Av + v \\ 0 & 6 & 3 & A^2v - v \end{array}\right]$$

und im zweiten

$$\begin{array}{r} \\ \\ Z_3 - Z_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 0 & 0 & v \\ 0 & 6 & 3 & Av + v \\ 0 & 0 & 0 & A^2v - Av - 2v \end{array}\right]$$

Nun kann man in der rechten unteren Ecke der Matrix das gesuchte Polynom ablesen. Es gilt ja

$$A^2v - Av - 2v = 0,$$

also können wir

$$q(X) = X^2 - X - 2$$

wählen. Daraus erhält man z.B. mit der Mitternachtsformel oder durch scharfes Hinsehen die Nullstellen

$$X_{1,2} = -1, 2.$$

Ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $q(D)y = 0$ wird nach 4.4.5 von den Funktionen $g_1(x) = e^{-x}$ und $g_2(x) = e^{2x}$ gebildet. Für die Ableitungen gilt $g_1'(x) = -e^{-x}$ und $g_2'(x) = 2e^{2x}$ Damit ergibt sich für die Wronskimatrix

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{2x} \\ -e^{-x} & 2e^{2x} \end{pmatrix}$$

und wir erhalten im Punkt $x_0 = 0$

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

und für die Invers-Transponierte

$$(M(0)^T)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Weiter gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Also ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$\begin{pmatrix} v & Av \end{pmatrix} \cdot (M(0)^T)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-x} \\ e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ 2e^{2x} - 2e^{-x} \\ e^{2x} - e^{-x} \end{pmatrix}$$

Variante 2

Wer lieber mit 3×3-Matrizen arbeiten möchte, kann die Aufgabe auch wie folgt lösen.

Dazu berechnen wir den Vektor

$$Av = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Weiter gilt

$$A^2v = A(Av) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Jetzt berechnet man mit Hilfe des charakteristischen Polynoms

$$q(\lambda) = det(A - \lambda E) = \lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$$

die Eigenwerte der Matrix A:

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = -1.$$

Ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $q(D)y = 0$ wird nach 4.4.5 von den Funktionen $g_1(x) = e^{2x}, g_2(x) = e^{-x}$ und $g_3(x) = xe^{-x}$ gebildet. Damit ergibt sich für die Wronskimatrix

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{-x} & xe^{-x} \\ 2e^{2x} & -e^{-x} & (-x+1)e^{-x} \\ 4e^{2x} & e^{-x} & (x-2)e^{-x} \end{pmatrix}$$

und wir erhalten im Punkt $x_0 = 0$

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

und für die Invers-Transponierte

$$(M(0)^T)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Weiter gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$\begin{pmatrix} v & Av & A^2v \end{pmatrix} \cdot (M(0)^T)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ g_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{-x} \\ xe^{-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ 2e^{2x} - 2e^{-x} \\ e^{2x} - e^{-x} \end{pmatrix}$$

Variante 3 Lösung mit Hilfe eines Fundamentalsystems.

Dazu berechnet man mit Hilfe des charakteristischen Polynoms

$$q(\lambda) = det(A - \lambda E) = \lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$$

die Eigenwerte der Matrix A:

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = -1.$$

Als nächstes bestimmt man die Eigenwerte indem man das lineare Gleichungssystem $(A - \lambda_k E) = 0$ löst. Dadurch erhält man die Eigenvektoren:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich das Fundamentalsystem

$$f_1(x) = e^{2x} v_1, \; f_2(x) = e^{-x} v_2, \; f_3(x) = e^{-x} v_3.$$

Und die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^{2x} \\ 1e^{2x} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-x} \\ 0 \\ e^{-x} \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-x} \\ e^{-x} \end{pmatrix}$$

Um die Lösung zum Anfangswertproblem zu bestimmen löst man das LGS $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ das durch

$$\left[\begin{array}{ccc||c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

gegeben ist und erhält

$$c = (1, 1, -2)^T$$

und damit

$$y(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ 2e^{2x} - 2e^{-x} \\ e^{2x} - e^{-x} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (*10 Punkte*) Sei F das Rotationsparaboloid

$$\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 9 - x^2 - y^2 \,,\ z \geqq 0 \} \,.$$

(a) Wir betrachten ebene Polarkoordinaten (r,φ) und die Parametrisierung

$$\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} x(r,\varphi) \\ y(r,\varphi) \\ z(r,\varphi) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r\,\cos(\varphi) \\ r\,\sin(\varphi) \\ ? \end{pmatrix}$$

Wie ist z in Abhängigkeit von (r,φ) zu definieren um eine Parametrisierung von F zu erhalten? Aus welchem Bereich müssen dabei r und φ gewählt werden?

(b) Berechnen Sie die Flächennormale

$$N(r,\varphi) := \frac{\partial \Phi}{\partial r} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \tag{1}$$

und deren Länge $\|N(r,\varphi)\|$.

(c) Berechnen Sie den Flächeninhalt $|F|$.

(a)

$$z = 9 - r^2$$

$$r \in [0,3]$$

$$\varphi \in [0, 2\,\pi] \text{ (oder jedem anderen Intervall der Länge } 2\,\pi)$$

(b) Die Flächennormale ist

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ -2\,r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\,\sin(\varphi) \\ r\,\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,r^2\cos(\varphi) \\ 2\,r^2\sin(\varphi) \\ r \end{pmatrix} \,.$$

Deren Länge ist

$$\|N(r,\varphi)\| = \sqrt{4\,r^4 + r^2} = r\,\sqrt{4\,r^2 + 1}\,.$$

(c) Wir haben also

$$|F| = \int_0^{2\,\pi} \int_0^3 r\sqrt{4\,r^2+1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = 2\,\pi \int_0^3 r\sqrt{4\,r^2+1}\mathrm{d}r \,.$$

Substitution von $u = 4\,r^2 + 1$ und folglich $\mathrm{d}u = 8\,r\mathrm{d}r$ mit anschliessender Rücksubstitution liefert

$$|F| = 2\,\pi\,\frac{1}{8} \int_1^{37} \sqrt{u}\mathrm{d}u = 2\,\pi\,\frac{2}{3 \cdot 8}[u^{3/2}]_1^{37} = \frac{\pi}{6}(\sqrt{37^3} - 1)\,.$$

Aufgabe 5 (*10 Punkte*) Es ist die 2π-periodische Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) - 1, & x \in [-\pi, 0) \\ 1 + \sin(x), & x \in [0, \pi) \end{cases} \quad \text{und} \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

gegeben.

(a) Skizzieren Sie f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi)$.

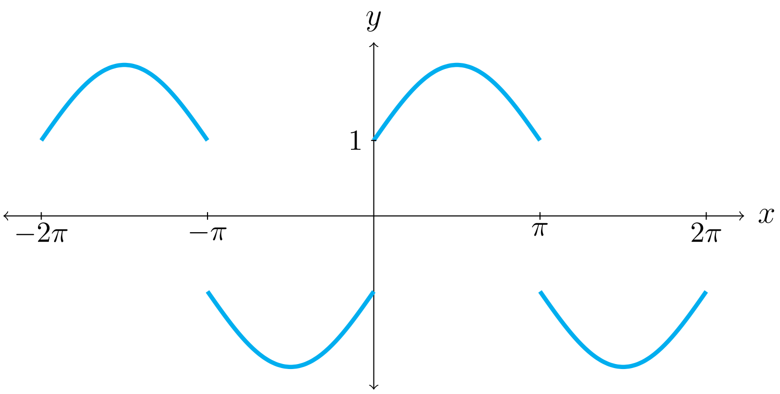
(b) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von f.

(c) Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert der Fourierreihe.

Hinweis: Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sin(x) \cdot \cos(y) &= \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)) \\ \cos(x) \cdot \cos(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)) \\ \sin(x) \cdot \sin(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)). \end{aligned}$$

(a)



(b) (1) Weil $f(x)$ ungerade ist, gilt $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(2) Die Koeffizienten b_n für f folgen durch einfache Integration sofort:

$$\begin{aligned} b_1 =& \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 + \sin(x)) \sin(x) dx \\ =& \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\sin(x) + \sin(x)^2\right) dx \\ =& \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin(x) dx + \int_0^{\pi} \sin(x)^2 dx \right) \\ =& \frac{4}{\pi} + 1, \end{aligned}$$

und für $n \geqq 2$

$$\begin{aligned}
b_n =& \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 + \sin(x)) \sin(nx) dx \\
=& \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin(nx) dx + \int_0^{\pi} \sin(x) \sin(nx) dx \right) \\
=& \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos(nx)}{n} + 0 \right]_0^{\pi} \\
=& \frac{2\,(1 - (-1)^n)}{n\pi}. \qquad \left(= \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & n \text{ ungerade} \\ 0, & n \text{ gerade} \end{cases} . \right)
\end{aligned}$$

(3) Die Fourierreihe von f ist

$$f(x) \sim \left(\frac{4}{\pi} + 1 \right) \sin(x) + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2\,(1 - (-1)^n)}{n\pi} \sin(nx).$$

$$\left(= \left(\frac{4}{\pi} + 1 \right) \sin(x) + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{4}{(2\ell + 1)\pi} \sin((2\ell + 1))x). \right)$$

(c) Die Funktion f ist stetig differenzierbar in den Intervallen $(n\pi - \pi, n\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$ mit endlichen links- bzw. rechtseitigen Grenzwerten sowohl für f als auch f' in allen Punkten $\{n\pi \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$. Da die Funktion f insbesondere stetig ist in $(n\pi - \pi, n\pi)$ $(n \in \mathbb{Z})$, konvergiert die Fourierreihe in diesem Bereich also gegen $f(x)$.

In den Punkten $\{n\pi | n \in \mathbb{Z}\}$ hingegen macht f einen Sprung der Höhe 2, sodass sich der Grenzwert dort berechnet als

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{x \to n\pi + 0} f(x) + \lim_{x \to n\pi - 0} f(x) \right) = 0.$$