Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 7** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 8 – 11** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 10.04.2017 über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **18.04.2017** bis **20.04.2017** einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{x^2}{2}-\cos(x)}{x\sin(x)}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan(x)$

Aufgabe 2 (*6 Punkte*) Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $f\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon (x,y,z) \mapsto x-2y+2z$ unter der Nebenbedingung $x^2+y^2+z^2=1$.

Aufgabe 3 (*10 Punkte*) Gegeben sei die Basis v_1, v_2, v_3, v_4 von $\mathbb{R}^4$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\2\\2\end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix}3\\3\\0\\0\end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix}1\\5\\1\\1\end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie eine Orthonormalbasis f_1, f_2, f_3, f_4 von $\mathbb{R}^4$ an mit

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}(f_1) &= \mathrm{L}(v_1),\\
\mathrm{L}(f_1,f_2) &= \mathrm{L}(v_1,v_2),\\
\mathrm{L}(f_1,f_2,f_3) &= \mathrm{L}(v_1,v_2,v_3),\\
\mathrm{L}(f_1,f_2,f_3,f_4) &= \mathrm{L}(v_1,v_2,v_3,v_4).
\end{aligned}$$

(b) Es sei A die Matrix mit den Spalten f_1, f_2, f_3, f_4. Geben Sie $A^\intercal A$ an.

Aufgabe 4 (*6 Punkte*)

Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{8x^2-9x+10}{x^3-2x^2+5x}\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 5 (*6 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie den Lösungsraum $\mathcal{L}(S) \subseteqq \mathbb{R}^4$ des linearen Gleichungssystems $S\colon\ Ax=0$ für

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -5\\ 1 & 1 & 4 & -4\\ 0 & -5 & -10 & -5\\ 1 & 2 & 6 & -3\end{pmatrix}.$$

(b) Untersuchen Sie, ob der Vektor $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ Element von $\mathcal{L}(S)$ ist.

(c) Geben Sie den Rang und die Determinante von A an.

Aufgabe 6 (*3 Punkte*) Berechnen Sie das Integral $\int\limits_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x\,.$

Aufgabe 7 (*6 Punkte*) Gegeben sei das Vektorfeld $v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

Wir betrachten zwei Kurven H und K in $\mathbb{R}^3$ vom Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zum Punkt $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Die Kurve H ist parametrisiert durch $B\colon [0, \ln(3)] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{pmatrix}$.

Die Kurve K ist parametrisiert durch $C\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die Kurvenintegrale $\int\limits_H v(x) \bullet \mathrm{d}x$ und $\int\limits_K v(x) \bullet \mathrm{d}x$.

Aufgabe 8 (*6 Punkte*) Gegeben sei eine Quadrik $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^\intercal A x + 2a^\intercal x + c = 0 \right\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad c = \frac{1}{3}.$$

(a) Geben Sie die Eigenwerte der Matrix A an:

$$\lambda_1 = \boxed{}, \quad \lambda_2 = \boxed{}, \quad \lambda_3 = \boxed{}.$$

(b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix F mit der Eigenschaft, dass $F^\intercal A F$ eine Diagonalmatrix ist. Geben Sie zudem $F^\intercal a$ an.

$$F = \boxed{} \qquad F^\intercal a = \boxed{}$$

(c) Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik Q :

$$\boxed{}$$

(d) Bestimmen Sie die Gestalt der Quadrik Q :

$$\boxed{}$$

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Geben Sie in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ die Grenzwerte der folgenden Reihen an.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{i}}{2^n} + \frac{2}{3^n} \right) = \boxed{}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\mathrm{i}\pi}{2} \right)^n = \boxed{}$$

Aufgabe 10 (*4 Punkte*) Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenfalls den Grenzwert. Falls die Folge nicht konvergiert, tragen Sie "divergent" ein.

(a) $\left(\ln\left(\dfrac{2n}{n+1}\right),\ \sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $\left(\dfrac{1}{2^n},\ \cos\left(\pi+\dfrac{1}{n}\right),\ 2\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Aufgabe 11 (*6 Punkte*)

(a) Zeichnen Sie $z_1 = \dfrac{10}{1-2\mathrm{i}}$, $z_2 = \dfrac{1}{2}(1-\mathrm{i})$ und $z_3 = \dfrac{1}{2}(1-\mathrm{i})^7$ in die komplexe Zahlenebene ein.

(b) Skizzieren Sie die Menge $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 1 \leqq |z+3-\mathrm{i}| \leqq 2 \ \wedge\ \mathrm{Im}(z+2\mathrm{i}) \leqq 3 \right\}$.