Aufgabe 1 (*10 Punkte*) Sei

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ z = x^2 - y^2 \ \text{und}\ x^2 + y^2 \leqq 1\}\,.$$

(a) (*6 Punkte*) Berechnen Sie den Flächeninhalt von S.

(b) (*4 Punkte*) Berechnen Sie die Zirkulation des Vektorfeldes $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin x + y^2 \\ \cos y + x^2 \\ \mathrm{e}^z + xy \end{pmatrix}$$

längs ∂S.

(a) Eine Parametrisierung von S ist gegeben durch

$$\Phi\colon [0,1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3\,, \quad (r, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen

$$\Phi_r = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 2r(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Phi_\theta = \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ -4r^2\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir für die Normale

$$\Phi_r \times \Phi_\theta = \begin{pmatrix} \sin\theta \cdot (-4r^2\sin\theta\cos\theta) - 2r(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \cdot r\cos\theta \\ 2r(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \cdot (-r\sin\theta) - \cos\theta \cdot (-4r^2\sin\theta\cos\theta) \\ \cos\theta \cdot r\cos\theta - \sin\theta \cdot (-r\sin\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2r^2\cos\theta \\ 2r^2\sin\theta \\ r \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$|\Phi_r \times \Phi_\theta| = \sqrt{4r^4\cos^2\theta + 4r^4\sin^2\theta + r^2} = r\sqrt{4r^2+1}\,.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} |S| &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} |\Phi_r \times \Phi_\theta| \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r(4r^2+1)^{\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2}(4u+1)^{\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}u = \left[\frac{\pi}{6}(4u+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1)\pi \end{aligned}$$

mit der Substitution $u := r^2$.

(b) Wir berechnen

$$\operatorname{rot} f = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 2x-2y \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad (\operatorname{rot} f)(\Phi(r,\theta)) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ -r\sin\theta \\ 2r(\cos\theta - \sin\theta) \end{pmatrix}.$$

Mit dem Satz von Stokes folgt somit

$$\begin{aligned} Z(f,\partial S) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\operatorname{rot} f)(\Phi(r,\theta)) \cdot (\Phi_r(r,\theta) \times \Phi_\theta(r,\theta)) \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ -r\sin\theta \\ 2r(\cos\theta - \sin\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2r^2\cos\theta \\ 2r^2\sin\theta \\ r \end{pmatrix} \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (-2r^3 + 2r^2(\cos\theta - \sin\theta)) \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \\ &= 2\pi \int_0^1 (-2r^3)\,\mathrm{d}r = \left[-\pi r^4\right]_0^1 = -\pi\,. \end{aligned}$$

Bemerkung: Wenn man die entgegengesetzte Normale wählt, so erhält man π.

Aufgabe 2 (*11 Punkte*) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y^{(3)} - 3y^{(2)} + 7y' - 5y = 2e^x \cos(x) - 16e^x \ .$$

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung.

SCHRITT 1: In einem ersten Schritt löst man die homogene Gleichung $y^{(3)} - 3y^{(2)} + 7y' - 5y = 0$. Das charakteristische Polynom $P(X)$ dieser Differentialgleichung ist $P(X) = X^3 - 3X^2 + 7X - 5$. Eine offensichtliche Nullstelle von P ist 1.

$$P(X) = X^3 - 3X^2 + 7X - 5 = (X-1)(X^2 - 2X + 5) = (X-1)(X-1+2i)(X-1-2i)$$

und hat die übrigen Nullstellen $1-2i$ und $1+2i$.
Die allgemeine homogene Lösung f_h ist dann:

$$f_h(x) = ae^x + be^x \cos(2x) + ce^x \sin(2x)$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

SCHRITT 2: In einem zweiten Schritt bestimmt man nun irgendeine beliebige (partikuläre) Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung – beispielsweise durch einen Ansatz nach Art der rechten Seite.

Partikuläre Lösung durch Ansatz nach Art der rechten Seite

Aufgrund des Superpositionsprinzips bekommt man eine partikuläre Lösung f_p von $y^{(3)} - 3y^{(2)} + 7y' - 5y = 2e^x \cos(x) - 16e^x$, indem man eine partikuläre Lösung f_{p_1} von $y^{(3)} - 3y^{(2)} + 7y' - 5y = 2e^x \cos(x)$ und eine partikuläre Lösung f_{p_2} von $y^{(3)} - 3y^{(2)} + 7y' - 5y = -16e^x$ bestimmt und diese beiden addiert: $f_p = f_{p_1} + f_{p_2}$.

- Zunächst zu $y^{(3)} - 3y^{(2)} + 7y' - 5y = 2e^x \cos(x)$:
  Weil $1 \pm i$ keine Nullstelle von P ist (keine Resonanz), machen wir den Ansatz

  $$f_{p_1}(x) = x^0\, e^x(\alpha \cos(x) + \beta \sin(x)) = e^x(\alpha \cos(x) + \beta \sin(x)).$$

  Dreimaliges Ableiten ergibt

  $$\begin{aligned} f'_{p_1}(x) &= e^x((\alpha + \beta)\cos(x) + (\beta - \alpha)\sin(x)), \\ f^{(2)}_{p_1}(x) &= e^x(2\beta \cos(x) - 2\alpha \sin(x)), \\ f^{(3)}_{p_1}(x) &= e^x(2(\beta - \alpha)\cos(x) - 2(\beta + \alpha)\sin(x)). \end{aligned}$$

  Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so erhält man

  $$e^x(3\beta \cos(x) - 3\alpha \sin(x)) = 2e^x \cos(x)$$

und damit $\alpha = 0$ und $\beta = \frac{2}{3}$. Also

$$f_{p_1}(x) = \frac{2}{3}e^x \sin(x).$$

- Jetzt zu $y^{(3)} - 3y^{(2)} + 7y' - 5y = -16e^x$:
  Weil 1 eine einfache Nullstelle von P ist (Resonanz), machen wir den Ansatz

  $$f_{p_2}(x) = \alpha x^1 e^x = \alpha x e^x.$$

  Dreimaliges Ableiten ergibt

  $$\begin{aligned} f'_{p_2}(x) &= \alpha(x+1)e^x, \\ f^{(2)}_{p_2}(x) &= \alpha(x+2)e^x \\ f^{(3)}_{p_2}(x) &= \alpha(x+3)e^x. \end{aligned}$$

  Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so erhält man

  $$\begin{aligned} \alpha((x+3) - 3(x+2) + 7(x+1) - 5x)e^x &= -16e^x \\ 4\alpha e^x &= -16e^x \end{aligned}$$

  und damit $\alpha = -4$. Also $f_{p_2}(x) = -4xe^x$.

Insgesamt erhalten wir $f_p(x) = f_{p_1}(x) + f_{p_2}(x) = \frac{2}{3}e^x \sin(x) - 4xe^x$.
SCHRITT 3: In einem dritten und letzten Schritt muss man schließlich noch die oben bestimmte allgemeine homogene Lösung und die oben bestimmte partikuläre Lösung addieren:

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = ae^x + be^x \cos(2x) + ce^x \sin(2x) + \frac{2}{3}e^x \sin(x) - 4xe^x \quad \text{mit} \quad a, b, c \in \mathbb{R},$$

um die gesuchte allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu bekommen.

Aufgabe 3 (*10 Punkte*)

Gegeben sind

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h(x) := \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \\ e^{2x} \end{pmatrix}.$$

(a) (*7 Punkte*) Bestimmen Sie für $i \in \{1,2,3\}$ jeweils die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = Ay\,, \quad y(0) = v_i,$$

wobei

$$v_1 := (1,0,0)^\top, \quad v_2 := (0,1,0)^\top,$$
$$v_3 := (0,0,1)^\top.$$

(b) (*3 Punkte*) Bestimmen Sie alle Lösungen des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$y' = Ay + h(x)\,.$$

(a) **Die Lösung des Anfangswertproblems:** $y' = Ay\,, \quad y(0) = v_1$.

$Av_1 = (1,0,0)^\top$. Es gilt $Av_1 = v_1$. Die Lösung zum Anfangswert v_1 ergibt sich also durch

$$f_1(x) = e^x v_1 = (e^x, 0, 0)^\top$$

Die Lösung des Anfangswertproblems: $y' = Ay\,, \quad y(0) = v_2$.

Es gilt $Av_2 = (1,1,0)^\top$ und $A^2v_2 = (2,1,0)^\top$.

Wir wenden den Gauß-Algorithmus auf die Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc||c} 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 1 & 1 & 0 & Av_2 \\ 2 & 1 & 0 & A^2v_2 \end{array}\right]$$

Im ersten Schritt erhalten wir

$$\begin{array}{r} \\ \\ Z_3 - 2Z_2 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc||c} 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 1 & 1 & 0 & Av_2 \\ 0 & -1 & 0 & A^2v_2 - 2Av_2 \end{array}\right]$$

und im zweiten

$$\begin{array}{r} \\ \\ Z_3 + Z_1 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc||c} 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 1 & 1 & 0 & Av_2 \\ 0 & 0 & 0 & A^2v_2 - 2Av_2 + v_2 \end{array}\right]$$

Nun kann man in der rechten unteren Ecke der Matrix das gesuchte Polynom ablesen. Es gilt ja

$$A^2 v_2 - 2Av_2 + v_2 = 0,$$

also konnen wir

$$q(X) = X^2 - 2X + 1$$

wählen. Daraus erhält man z.B. mit der Mitternachtsformel oder durch scharfes hinsehen die Nullstellen

$$X_{1,2} = 1.$$

Ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $q(D)y = 0$ wird nach 4.4.5 von den Funktionen $g_1(x) = e^x$ und $g_2(x) = xe^x$ gebildet. Für die Ableitungen gilt $g_1'(x) = e^x$ und $g_2'(x) = xe^x + e^x$ Damit ergibt sich für die Wronskimatrix

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & xe^x + e^x \end{pmatrix}$$

und wir erhalten im Punkt $x_0 = 0$

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und für die Invers-Transponierte

$$(M(0)^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$\begin{pmatrix} v_2 & Av_2 \end{pmatrix} \cdot (M(0)^T)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x \\ xe^x \end{pmatrix}$$

Die Lösung zum Anfangswert v_2 ergibt sich also durch

$$f_2(x) = (xe^x, e^x, 0)^\top$$

Die Lösung des Anfangswertproblems: $y' = Ay\,, \quad y(0) = v_3.$

$Av_3 = (0, 0, 2)^\top$. Es gilt $Av_3 = 2v_3$. Die Lösung zum Anfangswert v_3 ergibt sich also durch

$$f_3(x) = e^{2x} v_3 = (0, 0, e^{2x})^\top$$

(b) $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ ist ein Fundamentalsystem mit Wronski-Matrix

$$W(x) = \begin{pmatrix} e^x & xe^x & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} \end{pmatrix}$$

Es gibt

$$W(0) = I_3$$

Das inverse der Wronski-Matrix ist dann, mit Hilfe von Satz 6.5.5, nur $W(x)^{-1} = W(-x)$. Mit der Methode der Variation der Konstanten nach Satz 6.6.1 ergibt sich

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ c_3'(x) \end{pmatrix} = W(-x)h(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} & -xe^{-x} & 0 \\ 0 & e^{-x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \\ e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und damit durch Integrieren

$$\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \\ c_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x^2/2 \\ x \\ x \end{pmatrix}.$$

Damit ist die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems von der Form

$$\begin{aligned} f(x) &= c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) + c_1(x) f_1(x) + c_2(x) f_2(x) + c_3(x) f_3(x) \\ &= c_1 (e^x, 0, 0)^\top + c_2 (xe^x, e^x, 0)^\top + c_3 (0, 0, e^{2x})^\top + e^x (x + x^2/2, x, xe^x)^\top \end{aligned}$$

mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (*9 Punkte*) Gegeben ist die 2-periodische Funktion f mit

$$f(x) = |\sin(\pi x)|, \qquad \text{für } -1 \leqq x \leqq 1, \qquad f(x+2) = f(x).$$

(a) (*8 Punkte*) Berechnen Sie die reelle Fourier-Reihe von f.

(b) (*1 Punkt*) Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert der Fourier-Reihe.

(a) Die Funktion f ist gerade, folglich ist die Fourierreihe von f eine reine Kosinusreihe, d.h. es ist

$$\forall n \in \mathbb{N}: \qquad b_n = 0.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
a_n =& 2\int_0^1 \sin(\pi x)\cos(\pi n x)\,dx \\
=& 2\Big(-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\cos(\pi n x)\Big|_0^1 - n\int_0^1 \cos(\pi x)\sin(\pi n x)\,dx \Big) \\
=& 2\Big(\frac{1+(-1)^n}{\pi} - n\Big(\underbrace{\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\sin(\pi n x)\Big|_0^1}_{=0} - n\underbrace{\int_0^1 \sin(\pi x)\cos(\pi n x)\,dx}_{=\frac{1}{2}a_n} \Big)\Big).
\end{aligned}$$

Daher erhalten wir

$$(1-n^2)a_n = \frac{2}{\pi}(1+(-1)^n).$$

Diese Gleichung bestimmt alle Fourierkoeffizienten bis auf a_1 zu

$$a_n = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1+(-1)^n}{1-n^2},$$

denn die Gleichung

$$0 \cdot a_1 = 0$$

liefert **nicht** $a_1 = 0$ (das heißt, diese Folgerung ist an dieser Stelle noch unzulässig). Diesen Koeffizienten muss man seperat berechnen:

$$a_1 = 2\int_0^1 \sin(\pi x)\cos(\pi x)\,dx = \int_0^1 \sin(2\pi x)\,dx = -\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi x)\Big|_0^1 = 0.$$

Damit erhalten wir die Fourierreihe

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{1-n^2}\cos(\pi n x).$$

(b) Die Fourierreihe der Funktion f konvergiert punktweise überall gegen den Funktionswert von f.