Modulprüfung zur Mathematik für Informatiker und Softwaretechniker

Prof. Dr. W. Rump, Dr. E. Nava-Yazdani, K. Heil 21. Februar 2017

Bitte unbedingt beachten:

- **Bearbeitungszeit: 120 Minuten**. Verlangt und gewertet werden **alle Aufgaben**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 10 eigenhändig beschriebene DIN A4–Seiten sowie Zeichenmaterial. Nicht erlaubt sind insbesondere Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- **Aufgaben 1-5:** Nur die Endergebnisse werden gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Lösungsweg und Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- **Aufgaben 6-7:** Alle Lösungswege und Begründungen sind anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht!
- Die folgenden Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte dürfen ohne Herleitung verwendet werden.

$f(x)$	x^a	$x\ln x - x$	$\sin x$	$\tan x$
$\frac{d}{dx}f(x)$	$a\,x^{a-1}$	$\ln x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x)$	e^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$
$\frac{d}{dx}f(x)$	e^x	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- In der Klausur können insgesamt maximal **50 Punkte** erreicht werden.
- Die **Prüfungsergebnisse** werden voraussichtlich bis zum 14. 03. 2017 an das Prüfungsamt übermittelt und können dann über das Online–Portal LSF abgefragt werden.
- Die Klausureinsicht findet 16–17 Uhr am 10.04.2017 im Raum V57 7.122 statt.

  Viel Erfolg!

Name, Vorname: Matrikel–Nr. :

Aufgabe 1 (je 1 Punkt): Bestimmen Sie, ob die folgenden Aussagen zutreffen, indem Sie jeweils w (wahr) oder f (falsch) eintragen.

a) Für jedes Polynom p gilt $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x+p(x)}+\dfrac{p(x)}{x+\mathrm{e}^x}\right)=0$.

b) Es gibt linear abhängige Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ in $\mathbb{R}^3$ mit $|\langle\vec{u},\vec{v}\rangle|\neq\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$.

c) Die Gleichung $x^5-4x+2=0$ besitzt mindestens eine Nullstelle im Intervall $(0,1)$.

d) Die Richtungen der Vektoren $\vec{u},\vec{v}$ und $\vec{w}$ in $\mathbb{R}^3$ seien verschieden. Dann sind $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig.

e) Jede $n\times n$-Matrix mit n verschiedenen Eigenwerten ist diagonalisierbar.

f) Die Summe der Glieder einer Nullfolge ist konvergent.

g) Es gibt eine invertierbare Matrix mit Null als Eigenwert.

h) Die Hesse-Matrix jeder zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ist symmetrisch.

Aufgabe 2 (je 2 Punkte): Berechnen Sie:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+3n^2}{\sqrt{n^4+2n}}+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2^k-2}{3^k}\right) \quad = \quad \boxed{}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+\sin x}{x\ln(1+x)+\sin x} \quad = \quad \boxed{}$

c) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} 3x\sqrt{1+x^2}\,dx \quad = \quad \boxed{}$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x+y)\,dxdy \quad = \quad \boxed{}$

Aufgabe 3 (je 2 Punkte): Gegeben seien

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&2\\2&0&3\end{pmatrix}\quad,\quad u=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad v=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

Berechnen Sie:

a) $\|Au-v\|^2 \quad = \quad \boxed{}$

b) $\langle v-3u,v\rangle \quad = \quad \boxed{}$

Aufgabe 4 (je 2 Punkte): Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''-4y'+3y=10\cos x\,.$$

a) Bestimmen Sie unter Verwendung des Lösungsansatzes $y_p=A\cos x+B\sin x$ eine partikuläre Lösung y_p der Differentialgleichung:

$$y_p \ = \ \boxed{}$$

b) Bestimmen Sie die Lösung y der Differentialgleichung, die die Anfangsbedingungen $y(0)=2$ und $y'(0)=-1$ erfüllt:

$$y \ = \ \boxed{}$$

Aufgabe 5 (4+4 Punkte): Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = x^4 - 3x^2 - 4.$$

a) Berechnen Sie den Inhalt der eingeschlossenen Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse.

b) Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch

$$g(x, y) = f(x) + \mathrm{e}^{xy}$$

definiert. Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix der Funktion g.

Aufgabe 6 (2+6 Punkte): Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Funktion mit der Funktionsgleichung

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^3 + xy + 1 \\ 2xy + 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix Df der Funktion f.

b) Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch

$$g(x) = \langle f(x, x), f(0, 0) \rangle$$

definiert. Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen der Funktion f und geben Sie jeweils an, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt.

Aufgabe 7 (je 2 Punkte): Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Transformieren Sie die Matrix A mittels Gauß-Algorithmus auf Dreiecksform.

b) Bestimmen Sie den Rang von A.

c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

d) Bestimmen Sie die Determinante von A.

e) Geben Sie eine Basis des Kerns der Matrix A an.