Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik

Prof Dr F. Witt

HM 3 aer/mawi

Modulprüfung

01.03.2017

Name:

Matrikel-Nr.:

Studiengang:

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	Σ	Note
Punkte:								

Hinweis:

- Auf dieser Klausur sind maximal 66 Punkte zu erreichen.
- Als Hilfsmittel sind ausschließlich fünf eigenhändig und doppelseitig beschriebene DIN-A4 Blätter zugelassen.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Die Klausureinsicht ist voraussichtlich in der ersten Vorlesungswoche. Den genauen Termin finden Sie zeitnah auf der ILIAS Seite zur Vorlesung.
- Die Klausurergebnisse werden über das LSF bekannt gegeben.

Aufgabe 1 (2 + 2 + 2 + 4 + 2 Punkte).

Lösen Sie die folgenden kurzen Aufgaben.

a) *Parametriseren Sie den Ellipsoiden*

$$K = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1\}.$$

Ersetzen Sie hierfür die Platzhalter ? und $*$ sinnvoll.

$$\Phi(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} x(\varphi,\theta) \\ y(\varphi,\theta) \\ z(\varphi,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ ?\ \sin(\varphi)\cos(\theta) \\ * \end{pmatrix}.$$

b) *Lösen Sie für $u(x,y) = y^2 + \cos(x)$ das Anfangswertproblem $y(0) = 1$ mit*

$$\frac{\partial u}{\partial y} y' + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

c) *Sie werfen einunddreißig mal mit einer fairen Münze. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für höchstens fünfzehn mal Kopf?*

d) *Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:*

$$y' = \frac{e^{-y}}{2}\cos(x), \quad y(0) = 1.$$

e) *Bestimmen Sie das Gleichungssystem der Charakteristiken $(x(t), y(t))$ der partiellen Differentialgleichung*

$$y\frac{\partial u}{\partial x} + e^x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Aufgabe 2 (10 Punkte).

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der folgenden Differentialgleichung:

$$y'' - y' - 2y = 2x + e^{2x}.$$

Aufgabe 3 (9 Punkte).

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$y' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix} y.$$

Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems zur Anfangsbedingung

$$v = y(0) = (1,0,0)^T$$

.

Aufgabe 4 (11 Punkte)**.**

Es ist die 2π-periodische Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) - 1, & x \in [-\pi, 0) \\ 1 + \sin(x), & x \in [0, \pi) \end{cases} \qquad \text{und} \qquad f(x + 2\pi) = f(x)$$

gegeben.

a) *Skizzieren Sie f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi)$.*

b) *Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von f.*

c) *Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert der Fourierreihe.*

Aufgabe 5. *Wir betrachten den Körper*

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq 8 - z^3, 0 \leq z \leq 2\}.$$

Der Rand ∂K besteht aus dem Boden

$$B := \{(x, y, z) \in K | z = 0\}$$

und dem Mantel

$$M := \{(x, y, z) \in K | x^2 + y^2 = 8 - z^3\}$$

Weiter sei f das Vektorfeld

$$f(x, y, z) := \begin{pmatrix} -xz \\ yz \\ x^2 + y \end{pmatrix}.$$

a) *Skizieren Sie den Körper K und seine Randkomponenten B und M.*

b) *Parametrisieren Sie den Mantel M mit Hilfe von Zylinderkoordinaten.*

c) *Berechnen Sie den Fluss von f durch den Boden B nach Außen.*

d) *Berechnen Sie die Divergenz von f.*

e) *Schließen Sie ohne erneute Rechnung auf den Fluss von f durch den Mantel M nach Außen.*

Aufgabe 6 (12 Punkte)**.**

Auf einer Oberfläche befindet sich eine große Bakterienpopulation. Die einzelnen Bakterien sind zufällig und unabhängig von einander auf der Fläche verteilt. Wir gehen davon aus, dass die Anzahl der Bakterien, die Sie mit dem Mikroskop auf einem genügend kleinen Flächenausschnitt beobachten, poissonverteilt ist. Im Durchschnitt sehen Sie auf einer Fläche von einem Quadratmillimeter zwei Bakterien.

a) Bestimmen Sie die Parameter μ_1 und μ_2 der Poissonverteilungen der Anzahlen von Bakterien, die Sie auf Flächenausschnitten der Größen $1\,mm^2$ und $2\,mm^2$ beobachten.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beobachten Sie auf einem Ausschnitt von zwei Quadratmillimetern mindesten zwei Bakterien? Runden Sie auf eine ganze Prozentzahl.

c) Welcher Wahrscheinlichkeitsverteilung genügt die Fläche, die Sie absuchen müssen, um die erste Bakterie zu finden? Wieviel Fläche müssen Sie im Mittel absuchen, um auf die erste Bakterie zu stoßen?

Sie entdecken auf der selben Oberfläche zusätzlich eine neue Sorte von Bakterien, deren Anzahl ebenfalls poissonverteilt sei und die unabhängig von der ersten Sorte vorkommt. Im Durchschnitt sehen Sie auf einem Ausschnitt von einem Quadratmillimeter drei Bakterien der neuen Sorte.

d) Welcher Wahrscheinlichkeitsverteilung genügt die Gesamtzahl der Bakterien, die Sie auf einem Ausschnitt von einem Quadratmillimeter vorfinden? Mit welcher Wahrscheinlichkeit sehen Sie dort höchstens zwei Bakterien? Runden Sie auf eine ganze Prozentzahl.

$k\backslash\mu$	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
0	0.1353	0.0821	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067	0.0041	0.0025
1	0.2707	0.2052	0.1494	0.1057	0.0733	0.0500	0.0337	0.0225	0.0149
2	0.2707	0.2565	0.2240	0.1850	0.1465	0.1125	0.0842	0.0618	0.0446
3	0.1804	0.2138	0.2240	0.2158	0.1954	0.1687	0.1404	0.1133	0.0892
4	0.0902	0.1336	0.1680	0.1888	0.1954	0.1898	0.1755	0.1558	0.1339
5	0.0361	0.0668	0.1008	0.1322	0.1563	0.1708	0.1755	0.1714	0.1606
6	0.0120	0.0278	0.0504	0.0771	0.1042	0.1281	0.1462	0.1571	0.1606
7	0.0034	0.0099	0.0216	0.0385	0.0595	0.0824	0.1044	0.1234	0.1377
8	0.0009	0.0031	0.0081	0.0169	0.0298	0.0463	0.0653	0.0849	0.1033
9	0.0002	0.0009	0.0027	0.0066	0.0132	0.0232	0.0363	0.0519	0.0688

Tabelle 0.1: Werte der Poisson-Dichtefunktion $p_\mu(k) = \frac{\mu^k}{k!}\mathrm{e}^{-\mu}$