IMNG, Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Prof. Dr. K. Höllig

Höhere Mathematik I–III **Diplomvorprüfung** **8. 3. 2004**

1. Klausur

für Studierende der Fachrichtung **phys**

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt 180 Minuten. Verlangt und gewertet werden **alle zehn Aufgaben**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 25 handbeschriebene Blätter sowie Zeichenmaterial. Nicht erlaubt sind insbesondere Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- Bei den **Aufgaben 3–6** und **8–10** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate Blätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In den beiden Klausuren können zusammen maximal **180 Punkte** erreicht werden.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 13. 4. 2004 im NWZ II, Pfaffenwaldring 57, 8. Stock, durch Aushang bekanntgegeben.

  Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich bis zum 14. 5. 2004 in Raum V57.8.162 einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (5 Punkte): Geben Sie (ohne Begründung) an, ob die folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind.

a) $(\vec{a} \times \vec{b}\,) \times \vec{a} \parallel \vec{b}$, für alle Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{(3n)!}$ konvergiert.

c) Jede quadratische reelle Matrix A mit $|\det A| = 1$ ist orthogonal.

d) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$

e) $\operatorname{grad}(f^2) = (\operatorname{grad} f)^{\mathrm{t}}(\operatorname{grad} f)$, für stetig differenzierbares $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Berechnen Sie (Angabe des Ergebnisses genügt):

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}+2^n}{\sqrt{1+4^n}}$ **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n+1}}{n!}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ für die rekursiv definierte Folge $a_0 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{8+2a_n}\,.$

Aufgabe 3 (10 Punkte):

a) Stellen Sie den Kreis

$$|z+1| = \sqrt{2}\,|z - \mathrm{i}\,|\,, \qquad z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}\,,$$

in der Form $f(x,y) = 0$ dar und bestimmen Sie seinen Mittelpunkt und Radius.

b) Geben Sie alle komplexen Lösungen z der Gleichung

$$z^4 + 4z^2 = -16$$

in der Form $a + \mathrm{i}b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

Aufgabe 4 (10 Punkte): Berechnen Sie den Gradienten der Funktion

$$f(x,y) = y\mathrm{e}^x - x^2\mathrm{e}^y$$

sowie die Gleichungen der Tangenten an die implizit definierte Kurve $C: f(x,y) = 0$ in den Punkten $(x_*, y_*) = (0,0)$ und $(x_*, y_*) = (1,1)$.
In welchem der beiden Punkte stellt C lokal den Graph einer Funktion $y = \varphi(x),\ x \approx x_*$, dar? Bestimmen Sie für diesen Punkt die quadratische Taylor–Entwicklung von φ um x_*.

Aufgabe 5 (10 Punkte): Bestimmen Sie Determinante und Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie alle Lösungen des Ausgleichsproblems $|Ax - (0,0,3)^{\mathrm{t}}| \longrightarrow \min\,.$

Aufgabe 6 (10 Punkte): Bestimmen Sie die kritischen Punkte von

$$f(x,y) = (x^2-1)\arctan y - \pi x^2 + \frac{1}{2}\,y$$

sowie deren Typ (lokales Minimum, lokales Maximum oder Sattelpunkt).

Aufgabe 7 (10 Punkte): Geben Sie (ohne Begründung) an, ob die folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind.

a) Für jedes Vektorfeld $\vec{F}$ mit zweimal stetig partiell differenzierbaren Komponenten gilt $\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{F}) = \vec{0}$.

b) $\operatorname{grad} r^s = s r^{s-1}\vec{e}_r$ für positives s und $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

c) Die Differentialgleichung $u'' + u = \cos 2t$ besitzt genau eine reelle periodische Lösung.

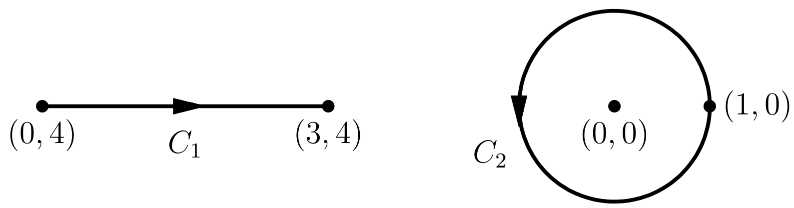
d) Jedes Vektorfeld besitzt ein Vektorpotential oder ein skalares Potential.

e) Die Laplace-Transformierte eines trigonometrischen Polynoms ist ein trigonometrisches Polynom.

Aufgabe 8 (10 Punkte): Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{F}(x,y) = r^\gamma\,\vec{e}_r + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha x + \beta y \end{pmatrix}, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}\,, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,,\ \gamma > 0\,,$$

die Arbeitsintegrale $\displaystyle\int_{C_i} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ über die abgebildeten Wege.



Untersuchen Sie dazu zunächst, für welche Parameter α, β, γ ein Potential zu $\vec{F}$ existiert, und bestimmen Sie dieses.

Aufgabe 9 (10 Punkte): Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

a) $y' = (2x-5)y, \quad y(3) = 1$

b) $y' = \dfrac{y^2}{x(2x-1)}, \quad y(1) = -1/2$

c) $y' = 2y + 5\sin x, \quad y(0) = 2$

Aufgabe 10 (10 Punkte): Gegeben sind das Vektorfeld

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y\mathrm{e}^z \\ -x\mathrm{e}^z \\ \mathrm{e}^{z\varrho} \end{pmatrix}, \qquad \varrho = \sqrt{x^2+y^2}$$

und der Zylinder

$$K: \quad x^2+y^2 \le a^2\,, \quad 0 \le z \le 1$$

mit der Oberfläche S. Berechnen Sie

a) $\operatorname{div}\vec{F}$,

b) den Fluss von $\vec{F}$ durch S nach außen,

c) den Fluss von $\operatorname{rot}\vec{F}$ durch S nach außen.
