Abschlussbericht Mathematik-Online

1 Zusammenfassung.

Im November 2001 riefen die Universitäten Stuttgart und Ulm das von dem Ministerium für Wissenschaft, Forschung und Kunst geförderte Projekt Mathematik-Online ins Leben. Ziel dieses Projektes war es, die Mathematikvorlesungen verschiedener Studiengänge durch Einbeziehung neuer Medien zu unterstützen und zu ergänzen. Dazu wurden von Ulmer Seite Kursmodule zur „Höheren Mathematik für Elektrotechniker“, „Funktionentheorie“ und „Variationsrechnung“ entwickelt sowie Datenbanken mit Aufgaben und Lösungen erstellt. Diese Inhalte dienen vor allem zur Vorbereitung für Studenten der Elektrotechnik und (Wirtschafts-)Mathematik auf Prüfungsklausuren im Hinblick auf die bevorstehende Umstellung der Diplomstudiengänge auf den Bachelor- bzw. Masterabschluss.

Ferner wurden Klausuren mit Lösungen zur „Höheren Mathematik“ erarbeitet, die im Juli 2005 und im Januar 2006 als Broschüre mit den Titeln „Klausuren mit Lösungen zur Höheren Mathematik - Band 1: HM I und HM II“ und „Klausuren mit Lösungen zur Höheren Mathematik - Band 2: HM III“ veröffentlicht und vertrieben wurden. Der erste Band wurde hierbei federführend von Ulmer Seite geschrieben. Schließlich entstanden Broschüren mit den Titeln „Aufgaben und Lösungen zur Höheren Mathematik - Band 1: Analysis und Lineare Algebra“ und „Aufgaben und Lösungen zur Höheren Mathematik - Band 2: Differentialgleichungen, Vektoranalysis, Komplexe Analysis uund Fourier-Analysis“, die im Juni 2005 und im Januar 2006 veröffentlicht und zum Selbstkostenpreis die Studenten verkauft wurden.

2 Erstellte Inhalte.

In der ersten Projektphase vom November 2001 bis September 2004 wurden die Kursmodule „Höhere Mathematik für Elektrtechniker I“ und „Höhere Mathematik für Elektrtechniker I“ erstellt sowie das Kursmodul „Höhere Mathematik für Elektrotechniker II“ begonnen.

In der **zweiten Projektphase** ab dem 1. Oktober 2004, über die hier berichtet wird, stand die Konzeption und Ausarbeitung der Kurse „Funktionentheorie“, „Höhere Mathematik II“ und „Variationsrechnung“ im Vordergrund. Die erstellten Inhalte werden mit der Angabe ihres Umfangs in den Abschnitten 2.1-2.3 aufgeführt.

Mit dem Kurs „Höhere Mathematik II“ wurde der letzte Teil der Einheit „Höhere Mathematik“ angefertigt. Diese stellt umfassendes Begleitmaterial zum Kernstoff der Höheren Mathematik zur Verfügung, welches alle Bereiche einer dreisemestrigen Ausbildung von Ingenieuren abdeckt. Da weitgehende Teile der Vorlesungen

„Lineare Algebra“ und „Analysis“ der ersten beiden Semester für Informatiker, Wirtschaftsmathematiker und Mathematiker in dieser Einheit enthalten sind, sind diese drei Kurse auch für Studenten anderer Studiengänge von Relevanz.

Der Kurs „Funktionentheorie“ ist für Studenten der (Wirtschafts-)Mathematik gedacht und bildet sowohl eine umfassende Wiederholung der Theorie und Sätze sowie eine Fülle von Beispielen und Aufgaben, die zur Prüfungsvorbereitung geeignet sind. Dabei werden in den Aufgaben sowohl Anwendungen wie die Berechnung uneigentlicher Integrale als auch theoretische Ergebnisse wie der Fundamentalsatz der Algebra erläutert.

Der Kurs „Variationsrechnung“ wendet sich an die Studenten der (Wirtschafts-) Mathematik gleichermaßen wie an Studenten der Ingenieur- und Naturwissenschaften. Er stellt einen einfachen und anhand vieler Beispiele erläuterten Einstieg in die Thematik der Variationsrechnung und Kontrolltheorie dar.

Jeder der oben aufgeführten Kurse besteht aus mehreren Paragraphen. Ein Paragraph besteht aus einem Repetitorium, Beispielen mit ausführlichen Lösungen, sowie Aufgaben mit Hinweisen und ausführlichen Lösungen. Im Repetitorium werden alle neu auftretenden Begriffe mathematisch exakt definiert, geltende mathematische Sätze formuliert und erläutert und Zusammenhänge dargestellt. An geeigneter Stelle werden zudem Methoden und Algorithmen erklärt. In den Beispielen werden die wichtigsten Anwendungen der im Repetitorium erläuterten Sachverhalte ausgeführt. Tiefere Ergebnisse und anspruchsvollere Prüfungsfragen werden in den Aufgaben behandelt, zu denen es jeweils einen Hinweis zur Bearbeitung gibt. Schließlich werden in der Lösung alle notwendigen Argumente und Rechenschritte ausführlich dargestellt.

Ebenfalls in diese Projektphase fiel die Erstellung der beiden Klausurenbroschüren für die „Höhere Mathematik“ in Zusammenarbeit mit der Universität Stuttgart.

2.1 Kurs „Höhere Mathematik II“.

Dieser Kurs umfasst ca. 350 DIN A4 Seiten. Folgende Abschnitte sind enthalten.

1. Lineare Algebra
   (a) Matrizen und lineare Gleichungssysteme (2 Beispiele, 1 Aufgabe)
   (b) Vektorräume (3 Beispiele, 3 Aufgaben)
   (c) Geometrie (2 Beispiele, 2 Aufgaben)
   (d) Lineare Abbildungen und Darstellungsmatrizen (4 Beispiele, 2 Aufgaben)
   (e) Determinanten (4 Beispiele, 3 Aufgaben)
   (f) Die Jordanform (4 Beispiele, 3 Aufgaben)
   (g) Hermitesch, unitär, normal (3 Beispiele, 2 Aufgaben)

2. Mehrdimensionale Analysis
    (a) Stetigkeit (3 Beispiele, 2 Aufgaben)
    (b) Differenzierbarkeit (5 Beispiele, 4 Aufgaben)
    (c) Mittelwertsatz und der Satz von Taylor (1 Beispiel, 2 Aufgaben)
    (d) Extrema, und Extrema mit Nebenbedingungen (4 Beispiele, 5 Aufgaben)
    (e) Implizite Funktionen (3 Beispiele, 3 Aufgaben)
    (f) Kurvenintegrale und konservative Vektorfelder (4 Beispiele, 4 Aufgaben)
    (g) Das mehrdimensionale Riemann-Integral (3 Beispiele, 2 Aufgaben)
    (h) Die mehrdimensionale Substitutionsregel (4 Beispiele, 3 Aufgaben)
    (i) Flächen und Oberflächenintegrale (3 Beispiele, 1 Aufgabe)
    (j) Integralsätze (7 Beispiele, 7 Aufgaben)
3. Fourierreihen
    (a) Fourierentwicklung (3 Beispiele, 3 Aufgaben)
    (b) Parseval (2 Beispiele, 1 Aufgabe)
4. Systeme linearer Differentialgleichungen
    (a) Die Matrixexponentialfunktion (3 Beispiele, 2 Aufgaben)
    (b) Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten (5 Beispiele, 5 Aufgaben)

2.2 Kurs „Funktionentheorie“.

Dieser Kurs umfasst ca. 180 DIN A4 Seiten. Enthalten sind die Paragraphen

1. Einführung und der Begriff der Holomorphie
    (a) Die Komplexe Zahlenebene (2 Beispiele, 1 Aufgabe)
    (b) Topologische Begriffe (6 Beispiele, 5 Aufgaben)
    (c) Potenzreihen, Exponentialfunktion und Logarithmus (2 Beispiele, 4 Aufgabe)
    (d) Die Riemannsche Zahlenkugel und Möbiustransformationen (4 Beispiele, 2 Aufgaben)
    (e) Holomorphie (4 Beispiele, 2 Aufgaben)
    (f) Kompakte Konvergenz (2 Beispiele, 2 Aufgaben)

2. Komplexe Integration
   (a) Kurvenintegrale (3 Beispiele, 2 Aufgaben)
   (b) Cauchyscher Integralsatz und Integralformel (3 Beispiele, 3 Aufgaben)
   (c) Logarithmus holomorpher Funktionen (2 Beispiele, 1 Aufgabe)
   (d) Potenzreihenentwicklung und der Satz von Liouville (3 Beispiele, 4 Aufgaben)
   (e) Isoliertheit der Nullstellen und Identitätssatz (1 Beispiel, 2 Aufgaben)
   (f) Konforme Abbildungen und das Maximumprinzip (1 Beispiel, 1 Aufgabe)
   (g) Windungszahl (1 Beispiel, 2 Aufgaben)
   (h) Unendliche Produkte (2 Beispiele, 4 Aufgaben)
3. Singularitäten
   (a) Singularitäten und Laurentreihen (2 Beispiele, 3 Aufgaben)
   (b) Residuensatz und uneigentliche Integrale (2 Beispiele, 2 Aufgaben)
   (c) Null- und polstellenzählendes Integral und der Satz von Rouché (2 Beispiele, 3 Aufgaben)
4. Harmonische Funktionen
   (a) Eigenschaften harmonischer Funktionen (2 Beispiele, 2 Aufgaben)
   (b) Das Dirichletproblem (1 Aufgabe)

2.3 Kurs „Variationsrechnung“.

Dieser Kurs umfasst ca. 60 DIN A4 Seiten. Enthalten sind die Paragraphen

1. Die 1. Variation und die Eulersche Differentialgleichung (3 Beispiele, 3 Aufgaben)
2. Variationsprobleme mit variablen Endpunkten sowie mit Nebenbedingungen (5 Beispiele, 5 Aufgaben)
3. Die notwendigen Bedingungen von Weierstraß und Legendre (3 Beispiele, 2 Aufgaben)
4. Die Theorie der zweiten Variation (4 Beispiele, 3 Aufgaben)

2.4 Eine exemplarische Aufgabe.

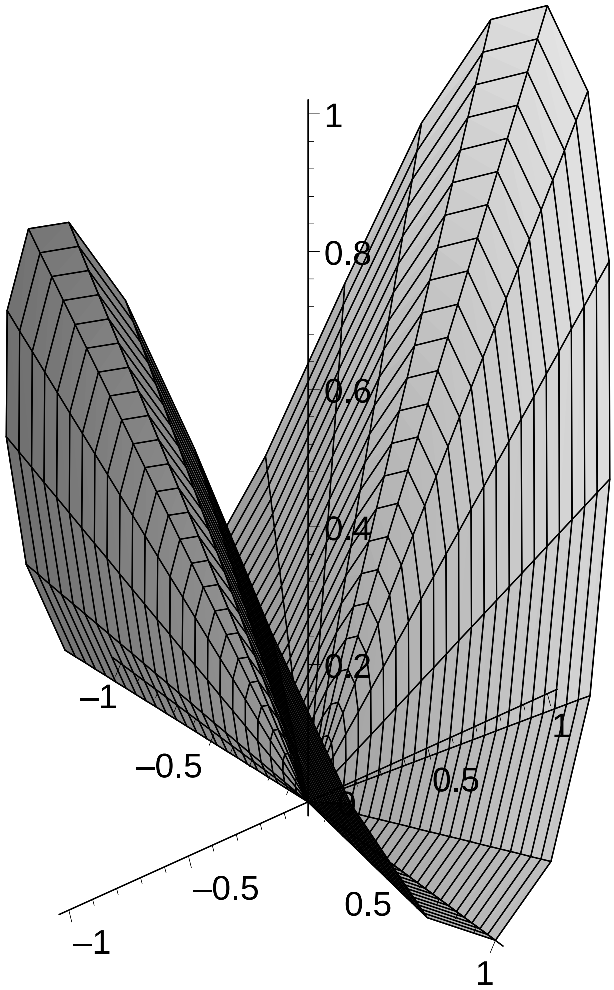
Aufgabe.
Sei $\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, (\cos t)^2)^{\mathrm{t}}$.
Sei das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x_1, x_2, x_3) \;=\; \begin{pmatrix} e^{x_1} - x_2 + 3x_1^2 x_2 \\ x_1 + x_1^3 + x_2^2 e^{x_2} + e^{x_3} \\ x_2 e^{x_3} \end{pmatrix} .$$

Berechne das Kurvenintegral $\int_\gamma f$.

Hinweis.
Da rot v erheblich einfachere Gestalt als v hat, wende man den Stokesschen Integralsatz auf die Fläche $\Phi(r,t) = (r \sin t,\, r \cos t,\, r(\cos t)^2)^{\mathrm{t}}$ an und berechne $\int_\Phi \operatorname{rot} v$.

Lösung.
Sei $\Phi : K := [0,1] \times [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch $\Phi(r,t) = (r \cos t,\, r \sin t,\, r(\cos t)^2)^{\mathrm{t}}$.
Skizze des Trägers von Φ.



Den Rand ∂K von K, der sich aus vier Geradenstücken zusammensetzt, beschreiben wir durch die folgenden vier ebenen Kurven.

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= (0,-t)^{\mathrm{t}}\ , & t \in [-\pi,\pi] \\
\beta(t) &= (t,-\pi)^{\mathrm{t}}\ , & t \in [0,1] \\
\gamma(t) &= (1,t)^{\mathrm{t}}\ , & t \in [-\pi,\pi] \\
\delta(t) &= (-t,\pi)^{\mathrm{t}}\ , & t \in [-1,0]\ .
\end{aligned}$$

Der Rand $\partial\Phi = \Phi \circ \partial K$ der Fläche Φ wird also beschrieben durch die vier Raumkurven

$$\begin{aligned}
(\Phi\circ\alpha)(t) &= (0,\ 0,\ 0)^{\mathrm{t}}\ , & t \in [-\pi,\pi] \\
(\Phi\circ\beta)(t) &= (-t,\ 0,\ t)^{\mathrm{t}}\ , & t \in [0,1] \\
(\Phi\circ\gamma)(t) &= (\cos t,\ \sin t,\ (\cos t)^2)^{\mathrm{t}}\ , & t \in [-\pi,\pi] \\
(\Phi\circ\delta)(t) &= (t,\ 0,\ -t)^{\mathrm{t}}\ , & t \in [-1,0]\ .
\end{aligned}$$

Eine Betrachtung dieser Wege wird die Rechnung erleichtern. Zunächst ist $\Phi\circ\alpha$ ein konstanter Weg, d.h. ein Kurvenintegral längs dieses Weges ist 0. Ferner ist $\Phi\circ\beta$ genau der zu $\Phi\circ\delta$ entegegengestetzte Weg. Die Kurvenintegrale längs dieser beiden Wege heben sich gegenseitig auf. Es bleibt $\Phi\circ\gamma$ zu betrachten.
Weiterhin berechnen wir die Rotation von f zu

$$\mathrm{rot}\ f \ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

sowie den Normalenvektor

$$\mathrm{n}_\Phi \ = \ \Phi_r \times \Phi_\varphi \ = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ (\cos t)^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ -2r(\cos t)(\sin t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ r \end{pmatrix},$$

desssen oberen beiden Einträge uns nicht interessieren.
Der Stokessche Integralsatz liefert unter Beachtung der Tatsache, daß nur $\Phi\circ\gamma$ einen relevanten Beitrag zum Kurvenintegral längs ∂K liefert, also

$$\begin{aligned}
\int_{\Phi\circ\gamma} f &= \int_{\partial K} f \\
&= \int_K \mathrm{rot}\ f \\
&= \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (0,0,2) \begin{pmatrix} * \\ * \\ r \end{pmatrix} \,\mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}r \\
&= 2\pi\ .
\end{aligned}$$

2.5 Klausuren mit Lösungen zur Höheren Mathematik.

Folgende Klausuren wurden mit Hinweisen und ausführlichen Lösungen konzipiert und erstellt.

1. Drei Scheinklausuren zur HM I
2. Eine Scheinklausur zur HM II

3. Zwei Scheinklausuren zur HM III

4. Drei Vordiplomklausuren zur HM I und HM II

5. Zwei Vordiplomklausuren zur HM III

Diese Klausuren wurden im Rahmen der oben genannten Broschüren veröffentlicht und vermarktet. Beispielsweise haben in Ulm etwa 80% der Elektrotechnikstudenten im zweiten Semester diese erworben und zur Prüfungsvorbereitung für das Vordiplom verwendet. (Stand: Sommer 2005.)

Aus Zeitgründen und da die Kooperation mit der GUC nicht wie geplant verlaufen ist, wurden die Übersetzungen ins Englische nicht weiter verfolgt.

3 Personen.

1. Andreas Martin: vom 1.10.04 bis zum 30.9.06 Hauptverantwortlicher für Inhalt, Planung und Organisation in Nachfolge von Matthias Künzer.

2. Markus Tentler: Wissenschaftliche Hilfskraft vom 1.10.04 bis zum 30.9.06.

3. Markus Wahrheit: Wissenschaftliche Hilfskraft vom 1.10.04 bis zum 30.9.06.

4. Katja Setzer: Studentische Hilfskraft vom 15.2.06 bis zum 30.9.06.

4 Online-Auftritt.

Die Mathematik-Online ist auf der Homepage der Universität Ulm unter dem Link *E-Learning* bereitgestellt und damit jederzeit für die Studenten aller Fächer zugänglich.

Ulm, den 04.10.06, Prof. Dr. Werner Kratz, Dr. Andreas Martin, Dr. Markus Wahrheit, Dipl.-Math. Markus Tentler, stud. math. Katja Setzer