Mathematik–Online:
Beiträge zu berühmten, gelösten und ungelösten Problemen

Nummer 2 - Mai 2008

Ein Millenniumsproblem: Die globale Existenz und Eindeutigkeit glatter Lösungen der dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen

von Guido Schneider

1. Vorbemerkung. Eine wunderschöne Abhandlung über die Preise der Mathematik, insbesondere über die Millenniumsprobleme, findet sich in der Arbeit "Preiswerte Mathematik" von Hans-Christoph Grunau, Professor an der Universität Magdeburg. Siehe

http://www-ian.math.uni-magdeburg.de/home/grunau/Milleniumspreise.pdf .

Sie finden dort z.B. Antworten auf die Fragen, wieso es keinen Nobelpreis für Mathematik gibt und welche anderen Millenniumsprobleme existieren, so dass die folgende Abhandlung nur dem Millenniumsproblem

"Die globale Existenz und Eindeutigkeit glatter Lösungen
der dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen"

vorbehalten bleibt. Das Ziel wird sein, das Problem zu formulieren und in bekannte mathematische Fragestellungen einzuordnen.

2A. Was beschreiben die Navier-Stokes-Gleichungen? Wasser! Varianten dieser Gleichungen beschreiben die Bewegungen von Gasen und allgemeinen Flüssigkeiten. Die Navier-Stokes-Gleichungen in verallgemeinerter Form tauchen auch bei Modellen für Wettervorhersagen, in Klimamodellen, bei der Simulation zur Berechnung des Strömungswiderstandes eines Autos, bei der Konstruktion neuer Flugzeuge, wie dem Airbus A380, oder aber auch beim Fluss des Blutes durch unsere Adern auf.

2B. Was sind die Navier-Stokes-Gleichungen? Die Navier-Stokes-Gleichungen sind nichtlineare partielle Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \mathcal{R}^{-1}\Delta u - \nabla p - (u\cdot\nabla)u, \\ 0 &= \operatorname{div} u, \end{aligned}$$

welche die Evolution eines Geschwindigkeitsfeldes $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$ und eines Druckfeldes $p : \Omega \to \mathbb{R}$ einer inkompressiblen Flüssigkeit, wie Wasser, in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ beschreiben. $\mathcal{R}$ heißt die Reynoldszahl und ist in gewisser Weise proportional zur Komplexität des Flusses bzw. umgekehrt proportional zur Viskosität der Flüssigkeit.

3A. Herleitung. Im Fall einer reibungsfreien Flüssigkeit, d.h., $\mathcal{R}^{-1} = 0$, werden die Navier-Stokes-Gleichungen als Euler-Gleichungen bezeichnet. Sie wurden von Leonhard Euler (1707–1783) hergeleitet. Die Hinzunahme der inneren Reibung (Viskosität), d.h.,

$\mathcal{R}^{-1} > 0$, führt auf die Navier-Stokes-Gleichungen. Diese wurden unabhängig voneinander von Claude-Louis Navier (1785–1839), George Stokes (1819–1903), Simeon Poisson (1781–1840) und Jean Claude Saint-Venant (1797–1886) hergeleitet.

3B. Molekulare Beschreibung. Die Betrachtung der einzelnen Wassermoleküle würde nach dem Newtonschen Gesetz, Kraft ist gleich Masse mal Beschleunigung, zu einem sehr großen System Gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$m\ddot{x}_j = F_j(x_1, \ldots, x_N)$$

für $j = 1, \ldots, N$ führen, womit das Problem vollständig beschrieben wäre. Da die Kräfte F_j nicht zu bestimmen sind und $N \gg 10^{20}$ ist, wäre dies eine sehr unbefriedigende Herangehensweise.

3C. Kontinuumsbeschreibung. Eine alternative Vorgehensweise ist die Betrachtung der Flüssigkeit als Kontinuum. Es muss dann allerdings dafür Sorge getragen werden, dass keine Teilchen verloren gehen, d.h., dass die Masse erhalten bleibt. Die Navier-Stokes-Gleichungen bestehen daher aus zwei Gleichungen: Eine, die aus den Newtonschen Gleichungen stammt und eine für die Massenerhaltung. Wir bezeichnen die Geschwindigkeit am Ort $x \in \mathbb{R}^d$ zur Zeit t mit $u(x,t) \in \mathbb{R}^d$ mit $d = 2, 3$. Analog bezeichnen wir mit $\rho = \rho(x,t) \in \mathbb{R}$ die Dichte der Füssigkeit am Ort x zur Zeit t.

3D. Erhaltung der Masse. Dazu betrachten wir ein Testvolumen V mit Oberfläche S. Die Masse in V kann sich nur dadurch verändern, indem Masse über den Rand S abfließt. Dazu bezeichne $n(x) = (n_1, \ldots, n_d)(x)$ die äußere Einheitsnormale im Punkt x an die Oberfläche S. Wegen des Gaußschen Integralsatzes ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_V \rho dV &= -\int_S \rho u \cdot n dS = -\int_S \sum_{j=1}^d \rho u_j n_j dS \\
&= -\int_V \operatorname{div}(\rho u) dV = -\int_V \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}(\rho u_j) dV.
\end{aligned}$$

Da diese Beziehung für alle Testvolumen V gilt, müssen die Integranden gleich sein. Es gilt also

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0. \tag{1}$$

3E. Impulserhaltung. Analog kann sich der Impuls eines Testvolumens V nur durch Abfließen des Impulses über den Rand S oder durch äußere Kräfte auf das Volumen ändern. Anstatt der Dichte ρ muss nun die Impulsdichte ρu betrachtet werden. Wir erhalten analog zu oben

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_V \rho u_i dV &= \int_S \sum_{j=1}^d \rho u_i u_j n_j dS + \int_V f_i dV \\
&= \int_V \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}(\rho u_i u_j) dV + \int_V f_i dV
\end{aligned}$$

oder in differentieller Form

$$\frac{d}{dt}(\rho u_i) = \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j}(\rho u_i u_j) + f_i,$$

wobei die f_i die i-te Komponente der wirkenden Volumenkräfte ist.

3F. Konstitutive Gesetze. Die Herleitung der Gleichungen der Massenerhaltung und der Impulserhaltung erfolgten unabhängig von der konkret betrachteten Flüssigkeit oder des betrachteten Gases. Um Wasser zu beschreiben, muss angegeben werden, wie die Volumenkräfte f von der Geschwindigkeit u und der Dichte ρ abhängen. Ein solcher Zusammenhang heißt konstitutives Gesetz. Nur durch die vollständige Betrachtung aller Moleküle kann ein nahezu exakter Zusammenhang hergestellt werden. Da der Sinn der Kontinuumsdarstellung war, eben die einzelnen Moleküle nicht betrachten zu müssen, muss der Zusammenhang modelliert werden.

Die Volumenkräfte, insbesondere die innere Reibung und der Druck, werden durch Oberflächenkräfte g_i modelliert. Wir setzen die Existenz einer Matrix $\sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1,\ldots,d}$ voraus, so dass

$$g_i = \sum_{j=1,\ldots,d} \sigma_{ij} n_j.$$

Da

$$\int_S \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} n_j dS = \int_V \operatorname{div}(\sigma_{i\cdot}) dV,$$

ergibt sich

$$\rho\Big[\partial_t u_i + \sum_{j=1,\ldots,d} (u_j \cdot \partial_{x_j}) u_i\Big] = \sum_{j=1,\ldots,d} \partial_{x_j} \sigma_{ij}.$$

Wasser ist inkompressibel, d.h., $\rho = \rho_0$. Wird die innere Reibung vernachlässigt, so stammen die einzigen inneren Kräfte vom Druck. Es gilt

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij},$$

wobei $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und Null sonst. Diese Tatsache ist motiviert durch

$$\sum_{j=1,\ldots,d} \sigma_{ij} n_j = -\sum_{j=1,\ldots,d} p\delta_{ij} n_j = -p n_i,$$

d.h., der Druck p wirkt in das Innere eines Testvolumens V. Für dieses konstitutive Gesetz gilt

$$\sum_{j=1,\ldots,d} \partial_{x_j} \sigma_{ij} = -\sum_{j=1,\ldots,d} \partial_{x_j}(p\delta_{ij}) = \partial_{x_i} p.$$

Insgesamt erhalten wir für reibungsfreie Flüssigkeiten die Euler-Gleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t u + (u \cdot \nabla) u &= -\frac{1}{\rho} \nabla p, \\ \nabla \cdot u &= 0. \end{aligned}$$

Wird die innerere Reibung durch eine Art Diffusion modelliert, ergeben sich die Navier-Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t u + (u \cdot \nabla) u &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta u, \\ \nabla \cdot u &= 0. \end{aligned}$$

Ein Kritikpunkt an der Herleitung der Navier-Stokes-Gleichungen ist die auschließliche Betrachtung linearer Reibungsterme. Innere Reibung erzeugt Wärme, die bei der Modellierung ebenfalls vollständig vernachlässigt wurde.

4. Anfangswertprobleme. Die Navier-Stokes-Gleichungen können als Gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{u} = F(u), \qquad u|_{t=0} = u_0$$

in einem Funktionenraum X interpretiert werden.

Zu einem festen Zeitpunkt t ist $u(t) \in X$, wobei X der Phasenraum oder der Zustandsraum ist. F ist ein Vektorfeld auf X, d.h., für festes t ist $x \mapsto u(x,t)$ eine divergenzfreie Funktion $\Omega \to \mathbb{R}^d$, die durch F wieder in eine divergenzfreie Funktion $\Omega \to \mathbb{R}^d$ abgebildet wird.

4A. Interpretation als ∞-dimensionale Gewöhnliche Differentialgleichung. Die einfachste Geometrie Ω, die gewählt werden kann, ist der Würfel $[0,2\pi]^d$ mit periodischen Randbedingungen

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, \dots, x_d, t) &= u(x_1 + 2\pi, x_2, \dots, x_d, t) \\ &= \dots = u(x_1, x_2, \dots, x_d + 2\pi, t). \end{aligned}$$

Periodische Randbedingungen wurden auch in der Formulierung der Millionendollarfrage der Clay-Foundation vorgegeben. Die Lösungen können dann als Fourierreihe

$$\begin{aligned} u_j(x,t) &= \sum_{k_1,k_2 \in \mathbb{Z}} \hat{u}_{j,k_1,k_2}(t) e^{ik_1x_1 + ik_2x_2}, \\ p(x,t) &= \sum_{k_1,k_2 \in \mathbb{Z}} \hat{p}_{k_1,k_2}(t) e^{ik_1x_1 + ik_2x_2} \end{aligned}$$

geschrieben werden. Einsetzen und Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{u}_{1,k_1,k_2} &= -(k_1^2 + k_2^2)\hat{u}_{1,k_1,k_2} - ik_1 \hat{p}_{k_1,k_2} \\ &\quad - \sum_{\substack{l_1 + m_1 = k_1, \\ l_2 + m_2 = k_2}} (\hat{u}_{1,l_1,l_2} i m_1 \hat{u}_{1,m_1,m_2} + \hat{u}_{2,l_1,l_2} i m_2 \hat{u}_{1,m_1,m_2}), \\ \partial_t \hat{u}_{2,k_1,k_2} &= -(k_1^2 + k_2^2)\hat{u}_{2,k_1,k_2} - ik_2 \hat{p}_{k_1,k_2} \\ &\quad - \sum_{\substack{l_1 + m_1 = k_1, \\ l_2 + m_2 = k_2}} (\hat{u}_{1,l_1,l_2} i m_1 \hat{u}_{2,m_1,m_2} + \hat{u}_{2,l_1,l_2} i m_2 \hat{u}_{2,m_1,m_2}), \\ 0 &= ik_1 \hat{u}_{1,k_1,k_2} + ik_2 \hat{u}_{2,k_1,k_2} \end{aligned}$$

für $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

4B. Ziel: Wohlgestelltheit. Zu einer gegebenen Anfangsbedingung u_0, d.h. zu einem gegebenen Geschwindigkeitsfeld $x \mapsto u_0(x,0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$, soll für alle Zeiten $t \in [0,\infty)$ eine eindeutige Lösung $t \mapsto u(t)$, d.h., ein eindeutiges Geschwindigkeitsfeld $x \mapsto u(x,t)$, existieren.

5. Was kann schief gehen? Dass die Lösungen Gewöhnlicher Differentialgleichungen im Allgemeinen nicht für alle Zeiten existieren und eindeutig sein müssen, kann bereits im eindimensionalen Fall gesehen werden.

5A. Keine eindeutige Lösung. Betrachte die Gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{u} = \sqrt{u}$$

mit der Anfangsbedingung $u|_{t=0} = 0$. Dieses Problem besitzt nicht nur die Lösung $u = 0$, sondern auch unendlich viele andere Lösungen. Für jedes $\tau > 0$ ist

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{für} \quad 0 \le t \le \tau, \\ (t-\tau)^2/4, & \text{für} \quad \tau \le t, \end{cases}$$

auch eine Lösung. Es liegt also keine Eindeutigkeit von Lösungen vor.

5B. Explosion: keine globale Lösung. Betrachte die Gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{u} = 1 + u^2$$

mit der Anfangsbedingung $u|_{t=0} = 0$. Dieses Problem besitzt die eindeutige Lösung $u = \tan t$, d.h., die Lösung explodiert in endlicher Zeit und erreicht ∞ für $t = \pi/2$. Die Lösung existiert nicht für alle $t \in [0, \infty)$, d.h., es liegt keine globale Existenz der Lösungen vor.

6. $\mathbb{R}^d$ gegen $\mathbb{R}^\infty$. Die Situation bei den Navier-Stokes-Gleichungen verkompliziert sich erheblich durch das Betrachten unendlich vieler Gleichungen. Die Voraussetzungen des lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatzes von Picard-Lindelöf für Gewöhnliche Differentialgleichungen sind nicht mehr erfüllt. In unendlich vielen Dimensionen ist es durchaus möglich, dass die Lösung in einer Norm unendlich und in einer anderen Norm endlich ist.

6A. Endlich viele Dimensionen. In diesem Fall sind alle Normen äquivalent, d.h., sie lassen sich gegenseitig abschätzen. Betrachte z.B. für $u = (u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{R}^d$ die Normen $\|u\|_{\ell^1} = \sum_{k=1}^d |u_k|$ und $\|u\|_{\ell^\infty} = \sup_{k=1,\dots,d} |u_k|$. Dann gibt es positive Konstanten C_1 und C_2, so dass für alle $u \in \mathbb{R}^d$

$$C_1 \|u\|_{\ell^1} \le \|u\|_{\ell^\infty} \le C_2 \|u\|_{\ell^1}$$

gilt. Denn es ist

$$\|u\|_{\ell^1} = \sum_{k=1}^d |u_k| \le \sum_{k=1}^d \sup_{j=1\dots d} |u_j| \le d \sup_{j=1\dots d} |u_j| \le d \|u\|_{\ell^\infty} \ .$$

Weiter gilt

$$\|u\|_{\ell^\infty} = \sup_{j=1\dots d} |u_j| \le \sum_{j=1}^d |u_j| = \|u\|_{\ell^1} \ .$$

6B. Unendlich viele Dimensionen. Sei nun $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Definiere $\|u\|_{\ell^1} = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ und $\|u\|_{\ell^\infty} = \sup_{k\in\mathbb{N}} |u_k|$. Es gibt eine positive Konstante C_2, aber keine positive Konstante C_1, so dass für alle u gilt

$$C_1\|u\|_{\ell^1} \le \|u\|_{\ell^\infty} \le C_2\|u\|_{\ell^1}.$$

"$\ell^\infty \le \ell^1$": Es gilt zunächst

$$\|u\|_{\ell^\infty} = \sup_{j\in\mathbb{N}} |u_j| \le \sum_{j\in\mathbb{N}} |u_j| = \|u\|_{\ell^1} .$$

"$\neg(\ell^1 \le \ell^\infty)$": Nehme an, dass es ein $C_1 > 0$ mit $C_1\|u\|_{\ell^1} \le \|u\|_{\ell^\infty}$ gibt, d.h. $\|u\|_{\ell^1} \le C_1^{-1}\|u\|_{\ell^\infty}$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > C_1^{-1}$. Setze dann

$$u = (1, \dots, 1, 0, \dots)$$

mit n Einsen. Es gilt $\|u\|_{\ell^1} = n$ und $\|u\|_{\ell^\infty} = 1$ im Widerspruch zur Annahme.

7. Kriterien für globale Existenz und Eindeutigkeit. Die *lokale Existenz und Eindeutigkeit:* Für alle C_1 gibt es ein $T_0 > 0$, so dass zu $u_0 \in X$ mit $\|u_0\|_X \le C_1$ eine eindeutige Lösung $u : [0, T_0] \to X$ mit $u(0) = u_0$ existiert

und

a priori Abschätzungen: Es gibt ein $C_2 > 0$, so dass

$$\sup_{t\in[0,\infty)} \|u(t)\|_X \le C_2 \max(1, \|u_0\|_X),$$

falls Lösungen existieren

liefern durch Hintereinanderausführung der lokalen Existenz und Eindeutigkeit die

globale Existenz und Eindeutigkeit: Zu $u_0 \in X$ existiert eine eindeutige Lösung $u : [0, \infty] \to X$ mit $u(0) = u_0$.

7A. L^2-a priori Abschätzung. Da die Nichtlinearität (siehe Herleitung) und der Druck energieerhaltend sind, nimmt die Energie ab. Es ist

$$\begin{aligned}
\partial_t \int \sum_i (u_i)^2/2 &= \sum_i u_i\Big(\sum_j \partial_j\partial_j u_i - \partial_i p - \sum_j u_j\partial_j u_i\Big) \\
&= -\sum_{ij} (\partial_j u_i)^2 + \sum_i (\partial_i u_i) p - \sum_{ij} u_j \partial_j (u_i)^2/2 \\
&= -\sum_{ij} (\partial_j u_i)^2 + \sum_i (\partial_i u_i) p + \sum_{ij} (\partial_j u_j)(u_i)^2/2 \\
&= -\sum_{ij} (\partial_j u_i)^2 \le 0
\end{aligned}$$

und damit gilt die L^2-a priori Abschätzung

$$\|u(t)\|_{L^2} = (\int |u(x,t)|^2 dx)^{1/2} \le (\int |u(x,0)|^2 dx)^{1/2} = \|u(0)\|_{L^2}.$$

Funktionen, deren L^2-Norm endlich ist, dürfen Singularitäten aufweisen, d.h., sie dürfen an einzelnen Stellen unendlich werden.

7B. Lokale Existenz und Eindeutigkeit. Die lokale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen zu glatten, d.h. hinreichend oft differenzierbaren, Anfangsbedingungen folgt mittels der Variation der Konstantenformel und dem Banachschen Fixpunktsatz. Für nichtglatte Anfangsbedingungen gilt es, zwei gegenläufige Prozesse zu beachten.

• Die Nichtlinearität $-(u \cdot \nabla)u$ macht Singularitäten schlimmer: Ist $u(x) = 1/x$, so ist $u(x)u'(x) = -1/x^3$.

• Der Term $\partial_t u - \mathcal{R}^{-1}\Delta u$ verhält sich wie eine Diffusion. Er glättet Singularitäten.

Ist das Glattmachen durch die Diffusion stärker als das Erzeugen von Singularitäten durch die Nichtlinearität, so folgt wie im glatten Fall die lokale Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen im betrachteten Funktionenraum, d.h., um lokale Existenz und Eindeutigkeit vorliegen zu haben, dürfen die betrachteten Geschwindigkeitsfelder zu Beginn keine zu starken Singularitäten aufweisen.

7C. Unterschied von $\mathbb{R}^2$ zu $\mathbb{R}^3$. Wegen der a priori Abschätzung in L^2 folgt die globale Existenz und Eindeutigkeit in L^2, falls lokale Existenz und Eindeutigkeit in L^2 vorliegt. Singularitäten von L^2-Funktionen im $\mathbb{R}^3$ sind schlimmer als im $\mathbb{R}^2$, denn mit $r = (\sum_j x_j^2)^{1/2}$ ist

$$u(x_1, \ldots, x_d) = r^\alpha \in L^2([0,1]^d),$$

falls $\alpha > -d/2$.

Im $\mathbb{R}^2$ reicht das Glätten der Diffusion aus, um lokale Existenz und Eindeutigkeit nachzuweisen. Im $\mathbb{R}^2$ existiert auch eine weitere a priori Abschätzung (Enstrophie).

8. Die Millenniumsfrage. Bei den Navier-Stokes-Gleichungen im $\mathbb{R}^3$ konnte bislang für keinen Phasenraum gleichzeitig die globale Existenz der Lösungen und deren Eindeutigkeit gezeigt werden. Phasenräume, in denen die lokale Existenz und Eindeutigkeit, aber keine globale Existenz, gezeigt werden kann, bestehen aus Funktionen, die ein paarmal differenzierbar sind. Für die Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen folgt dann sofort, dass diese sogar analytisch in x und t sind. Allerdings werden in drei Raumdimensionen die garantierbaren Konvergenzradien mit wachsendem t immer kleiner bis diese irgendwann verschwinden. Ab diesem Zeitpunkt kann in diesen Funktionenräumen keine Existenz und Eindeutigkeit mehr garantiert werden. Das Millionendollarproblem besteht also darin, die Frage zu klären, ob in solchen Funktionenräumen globale Existenz und Eindeutigkeit gilt oder nicht gilt.

9. Konsequenzen. Die Beantwortung dieser Frage hat durchaus reale Anwendungen.

• Die Konvergenz numerischer Verfahren ist nur bei Glattheit der Lösungen garantiert. Können die Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen nach endlicher Zeit irregulär werden, so ist unklar, ob die numerischen Verfahren tatsächlich die Wirklichkeit richtig widergeben.

• Gilt die globale Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen, so ist Turbulenz im Innern einer Flüssigkeit ein endlich-dimensionales Phänomen, das mittels klassischer Chaostheorie beschrieben werden kann. Gilt sie nicht, so ist Turbulenz ein echt unendlich-dimensionales Phänomen.

• Im zweiten Fall wären die verwendeten konstitutiven Gesetze nicht mehr gültig. Die Navier-Stokes-Gleichungen wären ein schlechtes Modell der Wirklichkeit.

10. Was ist bekannt? Es ist nicht bekannt, ob globale Existenz und Eindeutigkeit glatter Lösungen gilt oder nicht gilt. Es gibt Evidenz für beide Antworten. Numerische Experimente sind heikel, da es stabile und instabile Richtungen gibt. Sie haben bislang keinen Beitrag zur Beantwortung der Frage geliefert. Bei der Anwendung etwas subtilerer Methoden stellt sich heraus, dass die Rotation der Geschwindigkeit eine wichtige Rolle spielt. Der aktuelle Stand der Dinge lässt sich z.B. in den folgenden Arbeiten [1]–[4] nachlesen. Der mathematische Hintergrund wird in [5] erklärt. Eine ausführliche Herleitung der Navier-Stokes-Gleichungen findet sich in [6].

Literatur

[1] Constantin, P.: Some open problems and research directions in the mathematical study of fluid dynamics. Mathematics unlimited—2001 and beyond, 353–360, Springer, Berlin, 2001.

[2] Fefferman, C.L.: Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation. The millennium prize problems, 57–67, Clay Math. Inst., Cambridge, MA, 2006.

[3] Temam, R.: Some developments on Navier-Stokes equations in the second half of the 20th century. Development of mathematics 1950–2000, 1049–1106, Birkhäuser, Basel, 2000.

[4] Wiegner, M.: The Navier-Stokes equations—a neverending challenge? Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 101 (1999), no. 1, 1–25.

[5] Temam, R.: Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. Second edition. Applied Mathematical Sciences, 68. Springer-Verlag, New York, 1997.

[6] Fowler, A.C.: Mathematical models in the applied sciences. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

Autor:
Prof. Dr. Guido Schneider
Institut für Analysis, Dynamik und Modellierung
Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 57
70569 Stuttgart, Germany