Fachbereich Mathematik
W. Kimmerle/ S. Poehler

Blatt 15 Ferienblatt
WS 2006/2007

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Aufgabe 1 (mündlich) - Aufbaukurs
Sei K ein Körper.

a) Zeigen Sie: $\mathrm{SL}(n, K) := \{A \in \mathrm{GL}(n, K); \det A = 1\}$ ist ein Normalteiler von $\mathrm{GL}(n, K)$.

b) Wenn K ein endlicher Körper mit q Elementen ist, wie viele Elemente besitzt dann $\mathrm{SL}(n, K)$?

c) Sei $Z = \{A \in \mathrm{GL}(n, K); A \cdot X = X \cdot A$ für alle $X \in \mathrm{GL}(n, K)\}$.
Zeigen Sie $Z \cap \mathrm{SL}(n, K) \lhd \mathrm{GL}(n, K)$ und berechnen Sie die Ordnung dieses Normalteilers, wenn K endlich ist mit q Elementen.

Aufgabe 2 (mündlich) Sei V ein K - Vektorraum, $\alpha : V^n \longrightarrow K$ eine Volumenform und φ ein Automorphismus von V.
Zeigen Sie, dass

$$\beta : V^n \longrightarrow K \text{ definiert durch } (w_1, \ldots, w_n) \mapsto \alpha(\varphi(w_1), \ldots, \varphi(w_n))$$

eine Volumenform ist.

Aufgabe 3 (mündlich) Zeigen Sie: $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ ist in $\mathbb{Z}^{n \times n}$ genau dann invertierbar, wenn $\det(A) = \pm 1$.

Aufgabe 4 (mündlich) Lösen Sie in Mathematik Online die interaktiven Aufgaben mit Nr 4, 5, 33 und 306.
Hinweise: Die Spur $Sp(A)$ einer Matrix $A = (a_{ij})$ ist die Summe der Hauptdiagonalelemente, also $Sp(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Aufgabe 5 (mündlich) Bestimmen Sie die Determinanten der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & 13 & 99 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

jeweils mit Hilfe des Entwicklungssatzes.

Aufgabe 6 (mündlich) Sei $A \in K^{n \times n}$. Wo tauchen $Sp(A)$ und $\det(A)$ im charakteristischen Polynom $\chi_A(\lambda)$ auf ?

Besprechung aller Aufgaben in der ersten Übung im SS 2007.