

LINEARE ALGEBRA UND ANALYTISCHE GEOMETRIE II

Aufgabe 1 (mündlich) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- Gilt für $A \in K^{n \times n}$, dass $S^{-1}AS$ für alle $S \in \text{GL}(n, K)$ diagonal ist, so folgt $A = 0$.
- Sind v_1, \dots, v_m Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten von $A \in K^{n \times n}$, so sind v_1, \dots, v_m linear unabhängig.
- Stimmen die algebraischen Vielfachheiten mit den geometrischen Vielfachheiten für alle Eigenwerte von $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ überein, so ist A in $\mathbb{C}^{n \times n}$ diagonalisierbar.
- Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist in $\mathbb{C}^{n \times n}$ diagonalisierbar.
- Sind $A, B \in K^{n \times n}$ diagonalisierbar in $K^{n \times n}$, so folgt $AB = BA$.

Aufgabe 2 (schriftlich) Gegeben seien die Matrizen $A, B \in K^{3 \times 3}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie für die Körper $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ die Eigenwerte und Eigenvektoren von A und B . Bezüglich welcher Körper sind A und B diagonalisierbar?

Aufgabe 3 (schriftlich)

- Bestimmen Sie den kleinsten affinen Unterraum L_1 des \mathbb{R}^4 , der die Punkte $(1, 2, 2, 1)^t$, $(1, 0, 0, 1)^t$ und $(0, 1, 0, 1)^t$ enthält, indem Sie eine Parameterdarstellung angeben.
- L_2 sei der affine Teilraum des \mathbb{R}^4 , der durch die Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird. Welche Dimension hat $L_1 + L_2$?

Aufgabe 4 - Aufbaukurs (schriftlich)

- a) Bestimmen Sie alle Geraden und alle Ebenen des $A^3(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, insbesondere deren jeweilige Anzahl.
- b) Es sei K der Körper mit p^n Elementen. Wie viele Geraden besitzt der affine Raum $A^2(K)$? Wie viele Geraden des $A^2(K)$ gehen durch einen fest vorgegebenen Punkt?

Abgabe der schriftlichen und Besprechung der mündlichen Aufgaben am 8. Mai
in den Übungen.