Name, Vorname	Matrikelnummer	Name des Tutors

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Punkte						

23. 05. 2007 **Scheinklausur zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie II** Prof. W. Kimmerle

Bitte lesen Sie sich die folgenden Vorbemerkungen durch, bevor Sie die Aufgaben bearbeiten:

- Mobiltelefone müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
- Bei den Aufgaben 1 bis 3 werden nur die Ergebnisse bewertet, geben Sie Ihren Lösungsweg also **nicht** an. Bei den Aufgaben 1 und 2 geben richtige Antworten einen Punkt und falsche Antworten einen Minuspunkt. Nicht beantwortete Fragen geben keinen Abzug. Die Minuspunkte werden nur innerhalb der einzelnen Aufgaben verrechnet und übertragen sich nicht auf die anderen Aufgaben.
- Die Aufgabe 2 darf auch von Teilnehmern des Basiskurses bearbeitet werden.
- Geben Sie für die Aufgaben 4 und 5 den kompletten Lösungsweg an.
- Sie haben 80 Minuten Zeit, die Aufgaben zu bearbeiten.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Sei V ein reeller Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:

	wahr	falsch
Ist λ ein Eigenwert von φ, dann ist λ^2 ein Eigenwert von $\varphi \circ \varphi$.	□	□
Ist φ nicht injektiv, dann ist 0 ein Eigenwert von φ.	□	□
Sind $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ Eigenvektoren von φ zum Eigenwert λ, dann ist auch $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ ein Eigenvektor von φ.	□	□
Ist V endlichdimensional, dann ist $\det(\varphi)$ ein Eigenwert von φ.	□	□

Aufgabe 2 - AUFBAUKURS (4 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

	wahr	falsch
Es gibt einen Körper mit zehn Elementen.	☐	☐
$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ist genau dann ein Körper, wenn m prim ist.	☐	☐
Das Polynom $x^3 + 1$ ist irreduzibel über dem Körper $\mathbb{F}_5$.	☐	☐
In $\mathbb{F}_4$ ist jedes Element ein Quadrat.	☐	☐

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Im affinen Raum $A^4(\mathbb{R})$ seien die affinen Unterräume L_1 und L_2 gegeben durch ihre Parameterdarstellung

$$L_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \ \lambda_i \in \mathbb{R},$$

$$L_2 : \quad \mu_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \ \mu_j \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie:

$\dim L_1$:	
$\dim L_2$:	
$\dim L_1 \cap L_2$:	
$\dim L_1 + L_2$:	
Eine Gleichungsdarstellung von $L_1 + L_2$:	
Eine Parameterdarstellung von $L_1 \cap L_2$:	

Aufgabe 4 (10 Punkte)

In Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$A_c = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ c & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A_c einschließlich ihrer algebraischen Vielfachheiten.

b) Bestimmen Sie die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte von A_c.

c) Für welche Werte von c ist A_c nicht diagonalisierbar ?

d) Für welche Werte von c gibt es eine Basis von $\mathbb{R}^4$, die aus Eigenvektoren besteht? Geben Sie gegebenenfalls eine solche Basis an.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Sei A ein affiner Raum mit $\dim(A) \geq 2$ und $\alpha : A \to A$ eine Affinität, die eine Fixpunkthyperebene L besitze. Zeigen Sie:

a) Ist g eine Gerade mit $g \cap L = \emptyset$, dann ist g parallel zu L.

b) Ist $P \notin L$, dann liegt α durch die Vorgabe von $\alpha(P) \notin L$ fest.

c) Ist $P \notin L$ und $\alpha(P) \neq P$, dann ist die Gerade $P\alpha(P)$ eine Fixgerade von α.