# Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

**Aufgabe 1 (mündlich)** Formulieren Sie die folgenden Aussagen mit Quantoren und verneinen Sie sie sowohl mit Quantoren als auch sprachlich. Welche der Aussagen sind wahr?

a) Jede Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ hat einen Fixpunkt.

b) Sei $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{6, 7, 8\}$ eine Abbildung. Dann ist $f$ nicht injektiv.

c) Für jede natürliche Zahl $n$ gibt es eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass für alle $m < n$ gilt: $f(m) > f(n)$.

d) Es gibt eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$ gilt: $f(m) > f(n)$.

**Aufgabe 2 (mündlich)** Sei $M$ eine Menge und $\mathcal{P}(M)$ ihre Potenzmenge. Eine Menge $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(M)$ heiße *stabil*, falls $\emptyset \in \mathcal{M}$, $M \in \mathcal{M}$ und $\mathcal{M}$ abgeschlossen bezüglich Schnitten und Vereinigungen ist (d.h., mit $A, B \in \mathcal{M}$ sind auch $A \cap B \in \mathcal{M}$ und $A \cup B \in \mathcal{M}$).

a) Bestimmen Sie für $M = \{1, 2, 3\}$ alle stabilen Mengen.

b) Suchen Sie Beispiele für stabile Mengen über $M = \mathbb{N}$.

c) Sind Schnitt und Vereinigung von stabilen Mengen wieder stabil?

d) Sei $\mathcal{M}$ eine stabile Menge zur Grundmenge $M$ und $\mathcal{C}(\mathcal{M}) := \{X \in \mathcal{P}(M) \mid \overline{X} \in \mathcal{M}\}$. Ist $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ stabil?

**Aufgabe 3 (mündlich)** Skizzieren Sie jeweils die Menge aller $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die folgende Aussageformen erfüllen:

a) $p(x, y) = ((1 \leq |x + y| \leq 3) \vee (x \geq 2))$

b) $q(x, y) = \max(|x - 2|, |y|) \leq 1$

c) $r(x, y) = ((2y \geq x - 2) \wedge (x < y \Rightarrow x \geq 0))$

Zeigen Sie:

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall}\ \underset{y_0\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{y>y_0}{\forall}\ q(x, y) \Rightarrow r(x, y).$$

**Aufgabe 4 (schriftlich)**

a) Sei $A = \{1, 2, 3\}$. Bestimmen Sie alle Äquivalenzrelationen auf $A \times A$.

b) Seien $G_2$ die Menge aller Geraden in der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$ und $G_3$ die Menge aller Geraden im Raum $\mathbb{R}^3$. Auf $G_i \times G_i$ sei eine Relation $R$ gegeben durch

$$g\,R\,h \;:\Leftrightarrow\; g \text{ und } h \text{ schneiden sich nicht oder sind identisch.}$$

Untersuchen Sie, ob $R$ eine Äquivalenzrelation auf $G_2 \times G_2$ bzw. $G_3 \times G_3$ ist.

**Aufgabe 5 (schriftlich)** Sei $f : M \to N$ eine Abbildung und $f^{-1} : \mathcal{P}(N) \to \mathcal{P}(M)$ die durch $f$ auf den Potenzmengen induzierte Abbildung (siehe Vorlesung). Zeigen Sie: $f$ ist genau dann injektiv, wenn $f^{-1}$ surjektiv ist.

Abgabe der schriftlichen und Besprechung der mündlichen Aufgaben am 7. November in den Übungen.