Fachbereich Mathematik
W. Kimmerle/ S. Poehler

Blatt 7
WS 2006/2007

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Aufgabe 1 (mündlich) Sei $K = \{a + b\sqrt{2} : \ a, b \in \mathbb{Q}\}$. Zeigen Sie, dass K mit der reellen Multiplikation und Addition ein Körper ist.

Aufgabe 2 (mündlich) Welche der folgenden Abbildungen sind Homomorphismen von Vektorräumen?

a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x,\, 0,\, y)$.

b) Sei $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ und $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{a}$.

c) $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $p \mapsto p'$, wobei mit p' die Ableitung des Polynomes p gemeint ist.

d) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto (\cos x,\, \sin x,\, x)$.

e) Eine Drehung um den Ursprung in der reellen Ebene.

f) $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$. ($\mathbb{C}$ ist sowohl ein $\mathbb{R}$-Vektorraum als auch ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Ändert das etwas an der Überlegung?)

Aufgabe 3 (mündlich)

a) Sei K ein Körper und seien V und W Vektorräume über K. Auf $\mathrm{Abb}(V, W)$ sei eine Addition gegeben durch

$$\varphi + \psi : \ x \mapsto \varphi(x) + \psi(x)$$

und eine skalare Multiplikation durch

$$\lambda \cdot \varphi : \ x \mapsto \lambda \cdot \varphi(x) \quad (\text{für } \lambda \in K, \varphi \in \mathrm{Abb}(V, W)).$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Abb}(V, W)$ mit $+$ und $\cdot$ einen K-Vektorraum bildet. Kann man dabei die Voraussetzungen an V und W abschwächen?

b) Auf $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sei wie in Teil a) die Addition $+$ gegeben und zusätzlich die Komposition $\circ$ von Abbildungen als Multiplikation. Untersuchen Sie, ob die beiden Distributivgesetze

$$\begin{aligned} f \circ (g + h) &= f \circ g + f \circ h \\ (g + h) \circ f &= g \circ f + h \circ f \end{aligned}$$

gelten.

Aufgabe 4 (schriftlich) Zeigen Sie, dass $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, x \mapsto ax + b,\ a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0\}$ mit der Komposition von Abbildungen als Verknüpfung eine Gruppe bildet und $U = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid x \mapsto x + b,\ b \in \mathbb{R}\}$ eine Untergruppe von G ist. Bestimmen Sie $Z(G) := \{h \in G \mid g \circ h = h \circ g \text{ für alle } g \in G\}$.

Bemerkung: $Z(G)$ heißt *Zentrum* von G.

Aufgabe 5 (schriftlich) Sei $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ und entsprechend $\mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}$. Zeigen Sie: Die Gruppen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ sind isomorph, die Gruppen $(\mathbb{Q}, +)$ und $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$ jedoch nicht.

Abgabe der schriftlichen und Besprechung der mündlichen Aufgaben am 5. Dezember in den Übungen.