Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Aufgabe 1 (mündlich) Seien V und W Vektorräume und $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Sind die Vektoren $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n} \in V$ linear abhängig, dann lässt sich $\mathbf{v_1}$ als Linearkombination der übrigen $\mathbf{v_i}$ darstellen.

b) Ist $\dim(V) < n$, dann sind n beliebige Vektoren aus V linear abhängig.

c) Sind die Vektoren $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}$ linear abhängig, dann ist $\dim(V) < n$.

d) Sind die Vektoren $\mathbf{v_1}$ und $\mathbf{v_2}$ linear abhängig, dann gibt es unendlich viele verschiedene Lösungen der Gleichung $\lambda_1\mathbf{v_1} + \lambda_2\mathbf{v_2} = 0$.

e) Sind die Vektoren $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n} \in V$ linear unabhängig, dann sind es auch die Vektoren $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k}$ für $k < n$.

f) Sind die Vektoren $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n} \in V$ linear unabhängig, dann sind es auch die Vektoren $\varphi(\mathbf{v_1}), \ldots, \varphi(\mathbf{v_n})$.

g) Sind die Vektoren $\varphi(\mathbf{v_1}), \ldots, \varphi(\mathbf{v_n})$ linear unabhängig, dann sind es auch die Vektoren $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}$.

Aufgabe 2 (mündlich) Seien V und W zwei $\mathbb{Q}$-Vektorräume und $\varphi : V \to W$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass φ genau dann linear ist, wenn $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$ für alle $v_1, v_2 \in V$ gilt. Bleibt diese Behauptung für $\mathbb{R}$-Vektorräume richtig?

Aufgabe 3 (mündlich) Sei $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Funktionen. Für $r \in \mathbb{R}$ sei $\chi_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\chi_r(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = r, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sind die Funktionen χ_r linear unabhängig? Bilden sie eine Basis von V?

Aufgabe 4 (schriftlich)

a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $A_1, \ldots, A_n$ abzählbare Mengen. Zeigen Sie, dass das kartesische Produkt $A_1 \times \cdots \times A_n$ wieder abzählbar ist.

b) Konstruieren Sie eine endliche Basis von $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum oder zeigen Sie, dass keine endliche Basis existiert.

Aufgabe 5 (schriftlich) Untersuchen Sie, ob die Vektoren

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ linear abhängig oder linear unabhängig sind.
Bearbeiten Sie nun **einen** der folgenden Aufgabenteile:

A) Bestimmen Sie alle Primzahlen p, für die die Vektoren $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ in $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^3$ linear abhängig sind.

oder

B) Bestimmen Sie alle $s, t \in \mathbb{R}$, für die die Vektoren

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} s \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$ linear abhängig sind.

Abgabe der schriftlichen und Besprechung der mündlichen Aufgaben am 12. Dezember in den Übungen.