Fachbereich Mathematik
W. Kimmerle/ S. Poehler

Blatt 10
WS 2006/2007

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Aufgabe 1 (mündlich) Lösen Sie die interaktiven Mathe-Online Aufgaben 356, 361, 369 und 372 zum Thema lineare Gleichungssysteme.
Sie finden diese Aufgaben unter

`http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/aufgaben/alle.html`

im unteren Abschnitt mit der Überschrift „Interaktive Aufgabenbereiche“.

Aufgabe 2 (mündlich) Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch?

a) Jedes homogene lineare Gleichungssystem ist lösbar.

b) Die Lösungsmenge eines inhomogenen linearen Gleichungssystems ist ein Vektorraum.

c) Ein inhomogenes lineares Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn das zugehörige homogene System nichttriviale Lösungen besitzt.

d) Ist A eine $n \times n$ - Matrix und hat das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ nur die triviale Lösung $x = 0$, dann hat für jedes $b = (b_1, \ldots, b_n)^T$ das inhomogene System $Ax = b$ genau eine Lösung.

Aufgabe 3 (mündlich) Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Lösen Sie das reelle lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \ldots & + & x_{n-2} & + & x_{n-1} & & & = & 2n \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \ldots & + & x_{n-2} & & & + & x_n & = & 2(n-1) \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \ldots & & & + & x_{n-1} & + & x_n & = & 2(n-2) \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
x_1 & + & x_2 & & & + & \ldots & + & x_{n-2} & + & x_{n-1} & + & x_n & = & 6 \\
x_1 & & & + & x_3 & + & \ldots & + & x_{n-2} & + & x_{n-1} & + & x_n & = & 4 \\
 & & x_2 & + & x_3 & + & \ldots & + & x_{n-2} & + & x_{n-1} & + & x_n & = & 2
\end{array}$$

Aufgabe 4 (schriftlich) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ den Lösungsraum (und dessen Dimension) des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccc}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\
x_1 & + & 2x_2 & & & = & -1 \\
2x_1 & & & + & t^2 x_3 & = & t
\end{array}$$

Aufgabe 5 (schriftlich) Sei $V = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller reellen Folgen. Überzeugen Sie sich davon, dass diese Menge mit komponentenweiser Addition und komponentenweiser skalarer Multiplikation ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen Untervektorräume von V sind:

$$\begin{aligned}
M_1 &= \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V \mid (a_n) \text{ konvergiert } \}. \\
M_2 &= \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V \mid \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}. \\
M_3 &= \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V \mid \text{ es gibt ein } N \in \mathbb{N} \text{ mit } a_n = a_m \text{ für } n, m \geq N\}.
\end{aligned}$$

b) Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\left(e_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge mit $e_k^{(k)} = 1$ und $e_i^{(k)} = 0$ für $i \neq k$. Sei U der von diesen Folgen aufgespannte Untervektorraum von V. Zeigen Sie: $U = M_2 \cap M_3$.

c) Zeigen Sie: U ist isomorph zu $\mathbb{R}[X]$.

Aufgabe 6 (schriftlich) - Aufbaukurs Die Fibonaccizahlen F_n sind definiert durch

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ für } n \geq 2.$$

a) Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$ den größten gemeinsamen Teiler von F_n und F_{n+1}. Wie viele Schritte braucht man dazu im Euklidischen Algorithmus?

b) Zeigen Sie, dass der Euklidische Algorithmus für zwei natürliche Zahlen $k > l$ höchstens $2\log_2 l + 1$ Schritte braucht, um $\mathrm{ggT}(k, l)$ zu berechnen. Mit $\log_2$ sei dabei der Logarithmus zur Basis 2 bezeichnet.

Abgabe der schriftlichen und Besprechung der mündlichen Aufgaben am 9. Januar in den Übungen.