Fachbereich Mathematik | Blatt 11
W. Kimmerle/ S. Poehler | WS 2006/2007

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Aufgabe 1 (mündlich) Bestimmen Sie den Kern und das Bild folgender linearer Abbildungen:

a) $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$.

b) $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei die Spiegelung an der Ebene mit Gleichung $x_1 = x_2$.

c) Sei $E \subset \mathbb{R}^3$ eine Ursprungsebene, g eine Gerade, die E in genau einem Punkt schneidet und $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Projektion auf E parallel zu g.

d) $\psi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $p(X) \mapsto p''(X)$.

e) $\psi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $p(X) \mapsto p(X^2)$.

Aufgabe 2 (mündlich) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ den Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 & t \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (mündlich) Seien $m, n \geq 3$ und A eine reelle $m \times n$ - Matrix. Welche der folgenden Operationen ändern den Rang von A nicht?

a) Vertauschen zweier Spalten.

b) Multiplizieren einer Zeile mit einer reellen Zahl.

c) Addieren der quadrierten Komponenten der zweiten Zeile zur ersten Zeile.

d) Permutieren der Einträge der ersten Spalte.

e) Streichen von Nullzeilen.

f) Einfügen der Summe zweier Zeilen als neue Zeile.

g) Ersetzen der ersten beiden Zeilen durch die Summe und die Differenz der beiden Zeilen.

h) Ersetzen der ersten drei Zeilen Z_1, Z_2 und Z_3 durch $Z_1 + Z_2$, $2Z_1 + Z_2 - Z_3$ und $Z_3 - Z_1$.

i) Addition von $(1, 1, \ldots, 1)$ zur ersten Zeile.

Aufgabe 4 (schriftlich)

a) Sei $A \in \mathbb{R}^{l \times m}$ und $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Rg}(AB) \leq \min\{\mathrm{Rg}(A), \mathrm{Rg}(B)\}.$$

b) Seien nun $A, B \in \mathbb{R}^{l \times m}$. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Rg}(A + B) \leq \mathrm{Rg}(A) + \mathrm{Rg}(B)$$

und geben Sie ein Beispiel mit $\mathrm{Rg}(A + B) < \mathrm{Rg}(A) + \mathrm{Rg}(B)$ an.

Aufgabe 5 (schriftlich) Für $n \in \mathbb{N}$ sei V der Vektorraum der reellen $n \times n$ - Matrizen.

a) Zeigen Sie: Die Abbildung $\varphi : V \to V$, $A \mapsto A + A^t$ ist linear.

b) Bestimmen Sie die Dimensionen des Kerns und des Bildes von φ.

Die Scheinklausur findet am **25. Januar** in folgenden Räumen zu folgenden Zeiten statt:

V57.03	13.30 - 15.00 Uhr	Nachnamen A - Le,
V7.02	14.00 - 15.30 Uhr	Nachnamen Lf - Z.

Abgabe der schriftlichen und Besprechung der mündlichen Aufgaben am 16. Januar in den Übungen.