Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Aufgabe 1 (mündlich) - Aufbaukurs
Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) In einer Gruppe G gibt es zu jedem Teiler t von $|G|$ ein $g \in G$ mit $o(g) = t$.

b) In $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein Element der Ordnung n.

c) In einer abelschen Gruppe ist jede Linksnebenklasse auch Rechtsnebenklasse.

d) In einer zyklischen Gruppe G gibt es zu jedem Teiler t von $|G|$ ein $g \in G$ mit $o(g) = n/t$.

Aufgabe 2 (mündlich) - Aufbaukurs
Welche der folgenden Gruppen sind zyklisch?

$$U(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}),\ U(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}),\ U(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}),\ U(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}),\ U(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}),\ U(\mathbb{Z}/27\mathbb{Z}).$$

Aufgabe 3 (mündlich) Bestimmen Sie:

a) alle möglichen Ordnungen von Elementen der S_7,

b) alle endlichen Untergruppen von $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

Aufgabe 4 (mündlich) Sei G eine Gruppe, U ein Normalteiler von G und V eine Untergruppe von G. Zeigen Sie, dass dann $UV = \{uv \mid u \in U, v \in V\}$ eine Untergruppe von G ist. Bleibt das Ergebnis richtig, wenn U nur eine Untergruppe ist?
Hinweis: Eine Untergruppe U ist Normalteiler, wenn für alle $g \in G$ gilt: $gU = Ug$.

Aufgabe 5 (mündlich)

a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2-t & 0 & 3 \\ 1 & -1-t & 2 \\ 1 & 1 & 2-t \end{pmatrix}.$$

b) Sei

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & 13 & 99 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\det B$ mit Hilfe der Definition.

Aufgabe 6 (schriftlich)

a) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $XA = AX$.

b) Bestimmen Sie alle $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $XM = MX$ für alle $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Aufgabe 7 (schriftlich) Sei G eine Gruppe und $\mathrm{Sym}(G)$ die Gruppe der Permutationen auf der Menge G. Zeigen Sie, dass G zu einer Untergruppe von $\mathrm{Sym}(G)$ isomorph ist. Betrachten Sie dazu für $g \in G$ die Abbildung

$$\sigma_g : G \to G, \quad a \mapsto ga,$$

zeigen Sie, dass $\sigma_g \in \mathrm{Sym}(G)$ gilt und untersuchen Sie die Abbildung

$$\Phi : G \to \mathrm{Sym}(G), \quad g \mapsto \sigma_g.$$

Aufgabe 8 (schriftlich) - Aufbaukurs

a) Sei $\Omega_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ und $a \in \mathbb{N} \cup \{0, -1\}$. Zeigen Sie: Die Anzahl aller k-Tupel $(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in \Omega_n^k$ mit $i_{j+1} - i_j > a$ für $1 \leq j \leq k-1$ ist

$$\binom{n-(k-1)a}{k}.$$

b) Wie groß ist die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, acht Pfosten eines geraden Zaunes mit 100 Pfosten so durch neue zu ersetzen, dass zwischen zwei neuen Pfosten mindestens zehn alte Pfosten stehen?

Abgabe der schriftlichen und Besprechung der mündlichen Aufgaben am 6. Februar in den Übungen.