# Mathematische Grundlagen für das Lehramt

Winter 2013/14

**Aufgabe 15.**

In Aufgabe 14 waren die injektiven Abbildungen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeben durch

$$f(n) = \begin{cases} n+1 & n \neq 3 \\ 1 & n = 3 \end{cases} \quad \text{und} \quad g(n) = \begin{cases} n+1 & n = 1,2 \\ 1 & n = 3 \\ n+2 & n > 3 \end{cases}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 2.7 (Cantor-Schröder-Bernstein) gibt es eine bijektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Geben Sie diese an.

**Aufgabe 16.**

**(a)** Sei $(H, *)$ ein Monoid. Zeigen Sie, dass das neutrale Element eindeutig ist.

**(b)** Sei $(H, *)$ eine Gruppe. Nach Definition gibt es zu jedem Element $h \in H$ ein Linksinverses $h^{-1}$, d. h. es gilt $h^{-1} \star h = e$. Zeigen Sie, dass dann für alle $h \in H$ auch gilt, dass $h \star h^{-1} = e$ ist, d. h. $h^{-1}$ ist auch Rechtsinverses von $h$.

**Aufgabe 17.**

Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen mit der angegebenen Verknüpfung Halbgruppen, Monoide oder Gruppen sind. Sind Sie kommutativ?

**(a)** Die Abbildungen einer Menge $M$ in sich selbst mit der Komposition von Abbildungen,

**(b)** $(\mathbb{Z}, -)$,

**(c)** $\mathbb{R}_k = \{x \in \mathbb{R} \mid x > k\}$ mit der Verknüpfung $*$ definiert via $x * y = xy - x - y + 2$. Hierbei ist $k$ eine beliebige, aber feste, natürliche Zahl.

**Aufgabe 18.**

**(a)** Eine *Bewegung* in der Ebene ist eine affine Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die Längen und Winkel bewahrt. Jede solche Bewegung ist Spiegelung, Drehung oder Translation. Die Symmetriegruppe eines Quadrats (im $\mathbb{R}^2$) besteht aus den Bewegungen, die das Quadrat in sich überführen, zusammen mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung. Wieviele Elemente hat diese Gruppe? Ist sie kommutativ?

**(b)** Ein *Graph* (genauer: ungerichteter Graph ohne Mehrfachkanten) $G = (V, E)$ ist eine Menge $V$ von Knoten (vertices) zusammen mit einer Menge $E$ von Kanten (edges). Dabei ist $E$ eine Teilmenge aller zwei-elementigen Teilmengen von $V$. Man stellt Graphen bildlich dar, indem man die Knoten als Punkte aufmalt und für jede Kante $(v_1, v_2) \in E$ eine Kante zeichnet, die die beiden Punkte verbindet. Beispiele von Graphen sind:

Ein *Automorphismus* eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine bijektive Abbildung $\varphi : V \to V$, sodass für $v_1, v_2 \in V$ gilt:

$$(v_1, v_2) \in E \Leftrightarrow (\varphi(v_1), \varphi(v_2)) \in E.$$

Die Menge aller Automorphismen eines Graphen zusammen mit der Hintereinanderausführung bildet eine Gruppe. Bestimmen Sie die Mächtigkeit der Automorphismengruppen in den obigen Beispielen.

**(c)** Stimmen die Automorphismengruppen mit den Symmetriegruppen überein, wenn man die Graphen als Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ betrachtet und Symmetriegruppen wie in (a) definiert?