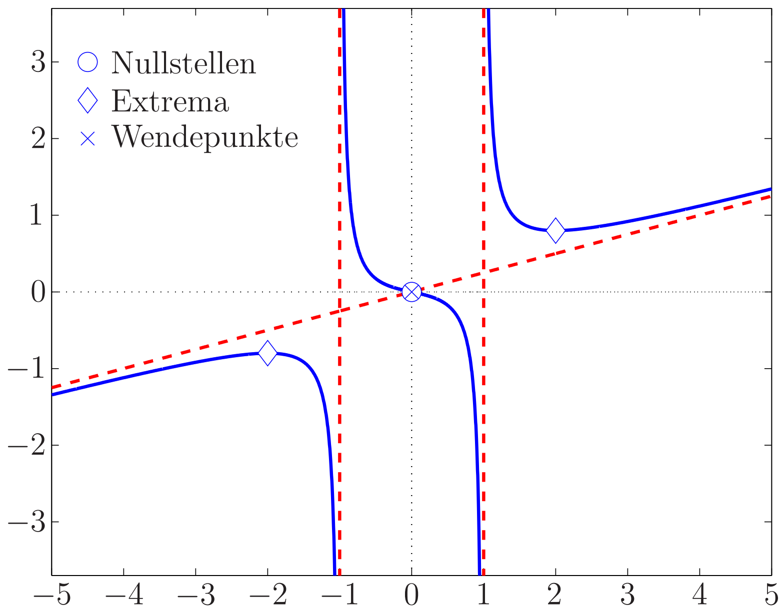
Mathematik–Online–Kurs

Vorkurs Mathematik



http://www.mathematik-online.org/

Mathematik–Online–Kurs

Vorkurs Mathematik

Stand: 9. Oktober 2013

Konzipiert von K. Höllig und W. Kimmerle unter Mitwirkung von C. Apprich, M. Borgart, J. Hörner, S. Heinz, I. Jahn, M. Knödler, I. Merz und J. Wipper.

http://www.mathematik-online.org/

Vorwort

Das Projekt Mathematik-Online (siehe `http://www.mathematik-online.org/`) wurde im November 2001 an den Universitäten Stuttgart und Ulm im Rahmen des Programms „Innovative Projekte in der Lehre“ des Landes Baden-Württemberg ins Leben gerufen. Ziel ist es, die Mathematik-Vorlesungen für Studierende der Natur- und Ingenieurwissenschaften durch Einbeziehung neuer Medien zu unterstützen und zu ergänzen. Den Schwerpunkt bildet dabei ein umfassendes Internetangebot bestehend aus den folgenden Komponenten:

- Lexikon: Sammlung mathematischer Definitionen, Sätze und Anwendungen
- Aufgaben: Über 2000 Übungs- und Prüfungsaufgaben, teilweise mit interaktiver Lösungskontrolle und Lösungshinweisen
- Tests: Interaktive Klausuren und themenbezogene Tests
- Kurse: Thematische Kurse für Studierende, Studienanfänger und Schüler

Die vorliegende Broschüre wendet sich insbesondere an Studienanfänger. Sie bereitet zentrale Themengebiete auf, die bereits aus der Schule bekannt sind und bildet somit das Fundament für die Mathematik-Vorlesungen im Grundstudium. Behandelt werden die Themengebiete „Mathematische Grundlagen“, „Analysis“ sowie „Lineare Algebra und Geometrie“. Am Ende jedes Kapitels findet sich eine Aufgabensammlung sowie ein Test, mit dessen Hilfe der eigene Kenntnisstand kontrolliert werden kann.
Allen Autoren, die zu dieser Broschüre beigetragen haben, sei herzlich gedankt.
Wir wünschen den Lesern viel Freude bei der Benutzung von Mathematik-Online und Erfolg in ihrem Studium.

Stuttgart, im Mai 2006

Klaus Höllig

Wolfgang Kimmerle

Trotz sorgfältiger Prüfung können Fehler nicht ausgeschlossen werden. Korrekturhinweise können per E-Mail an `webmaster@mathematik-online.org` gesendet werden.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen **9**
1.1 Aussagenlogik . . . 9
1.2 Mengen . . . 18
1.3 Abbildungen . . . 24
1.4 Kombinatorik . . . 27
1.5 Gleichungen und Ungleichungen . . . 35
1.6 Komplexe Zahlen . . . 47
1.7 Aufgaben und Test . . . 56

2 Analysis **63**
2.1 Folgen . . . 63
2.2 Reihen . . . 69
2.3 Funktionen . . . 71
2.4 Stetigkeit . . . 87
2.5 Differentialrechnung . . . 92
2.6 Extremwerte und Kurvendiskussion . . . 102
2.7 Integralrechnung . . . 116
2.8 Aufgaben und Test . . . 126

3 Lineare Algebra und Geometrie **133**
3.1 Elementare Geometrie: Dreiecke . . . 133
3.2 Lineare Gleichungssysteme . . . 142
3.3 Vektorräume . . . 156
3.4 Vektoren . . . 163
3.5 Geraden und Ebenen . . . 170
3.6 Quadratische Kurven . . . 182
3.7 Aufgaben und Test . . . 189

A Downloads **195**

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Aussagenlogik

1.1.1 Aussage

Unter einer Aussage versteht man einen sprachlichen Ausdruck, dem man eindeutig einen der beiden Wahrheitswerte w („wahr“) bzw. f („falsch“) zuordnen kann.
Aussagen werden mit Großbuchstaben bezeichnet,

$$A: \quad \text{Beschreibung}\,,$$

und können mit logischen Operationen verknüpft werden. Grundlegende mathematische Aussagen, die nicht aus anderen Aussagen abgeleitet werden können, nennt man Axiome.

Beispiel:

Die folgenden Beispiele illustrieren den Begriff der mathematischen Aussage.
Die Aussage

A: Jede natürliche Zahl, die größer als 1 ist, ist entweder eine Primzahl oder das Produkt von Primzahlen.

ist eine wahre Aussage.
Die Aussage

$$B: \quad \text{Jede Primzahl ist ungerade}$$

ist falsch, da 2 eine gerade Primzahl ist.
Die bisher unbewiesene Vermutung

$$C: \quad \text{Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge}$$

ist eine mathematische Aussage, denn sie ist entweder wahr oder falsch. Dabei ist ein Primzahlzwilling ein Paar benachbarter ungerader Zahlen, die beide prim sind, wie z.B.

$$(3,5),\ (5,7),\ (11,13),\ldots\,.$$

Der größte bisher bekannte Primzahlzwilling (Stand 19.4.2006) ist $16869987339975 \cdot 2^{171960} \pm 1$.
Bei der Feststellung

$$D: \quad \text{Freitag der dreizehnte ist ein Unglückstag}$$

handelt es sich nicht um eine Aussage, da ihr kein Wahrheitswert zugeordnet werden kann.

1.1.2 Logische Verknüpfungen

Logische Aussagen können durch die in der folgenden Tabelle angegebenen Operationen verknüpft werden.

Bezeichnung	Schreibweise	(Sprechweise)	wahr, genau dann wenn
Negation	$\neg A$	(nicht A)	A falsch ist
Konjunktion	$A \wedge B$	(A und B)	A und B wahr sind
Disjunktion	$A \vee B$	(A oder B)	A oder B wahr ist
Antivalenz	$A \not\equiv B$	(entweder A oder B)	A und B unterschiedliche Wahrheitswerte haben
Implikation	$A \Rightarrow B$ $B \Leftarrow A$	(aus A folgt B) (B folgt aus A)	A falsch oder B wahr ist
Äquivalenz	$A \Leftrightarrow B$	(A ist äquivalent zu B)	A und B den gleichen Wahrheitswert haben

Um in logischen Ausdrücken Klammern zu sparen, wird festgelegt, dass $\neg$ stärker bindet als $\wedge$ sowie $\vee$ und diese wiederum stärker als $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ sowie $\not\equiv$.

Bei der Implikation ist zu beachten, dass B nur dann wahr sein muss, wenn A wahr ist. Aus falschen Voraussetzungen können sowohl richtige, als auch falsche Schlüsse gezogen werden.

Das Zeichen für die Oder-Verknüpfung ist ein stilisiertes v, das für vel (lat. oder) steht. Für die Oder-Verknüpfung wird auch das „+“-Symbol verwendet und für die Und-Verknüpfung das „·“-Symbol. Verwendet man dann die 0 für den Wert „falsch“ und interpretiert jeden anderen Wert als „wahr“, können die logischen Verknüpfungen durch Rechnen mit natürlichen Zahlen durchgeführt werden.

Vor allem in Computersprachen werden die aus dem Englischen stammenden Begriffe NOT (Negation), AND (Konjunktion), OR (Disjunktion), EXOR oder XOR (exclusive or, Antivalenz) und deren Negationen NAND (negierte Konjunktion), NOR (negierte Disjunktion) und NXOR (Äquivalenz) verwendet.

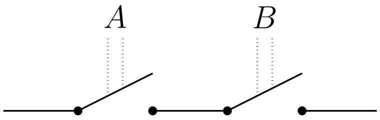
In der folgenden Tabelle sind die Wahrheitswerte der vorgestellten Verknüpfungen angegeben. Dabei steht w für wahr und f für falsch.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \not\equiv B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	f	w	w
w	f	f	f	w	w	f	f
f	w	w	f	w	w	w	f
f	f	w	f	f	f	w	w

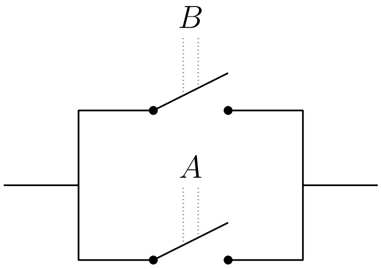
Beispiel:

Stellt man Aussagen als Schalter dar, die geschlossen sind, falls die Aussage wahr ist beziehungsweise geöffnet sind, wenn die Aussage falsch ist, so kann die Und-Verknüpfung durch eine Serienschaltung und die Oder-Verknüpfung durch eine Parallelschaltung realisiert werden.

Und-Verknüpfung

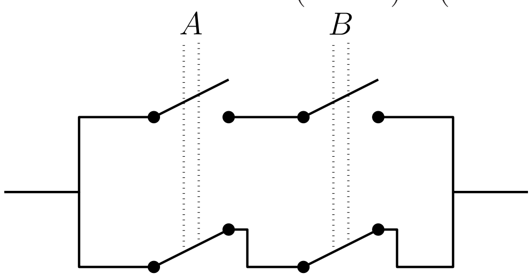


Oder-Verknüpfung

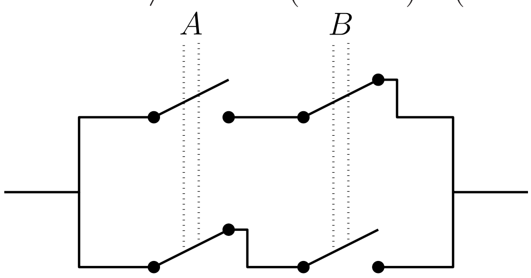


Eine negierte Aussage entspricht einem Schalter, der geschlossen ist, falls die Aussage falsch ist. Damit lassen sich auch Schaltbilder für die Äquivalenz, Antivalenz und Implikation angeben.

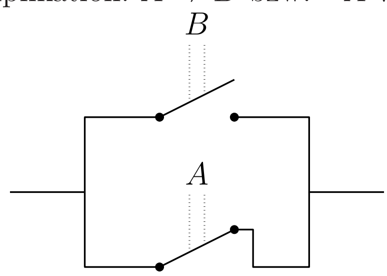
Äquivalenz: $A \Leftrightarrow B$ bzw. $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$



Antivalenz: $A \not\equiv B$ bzw. $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

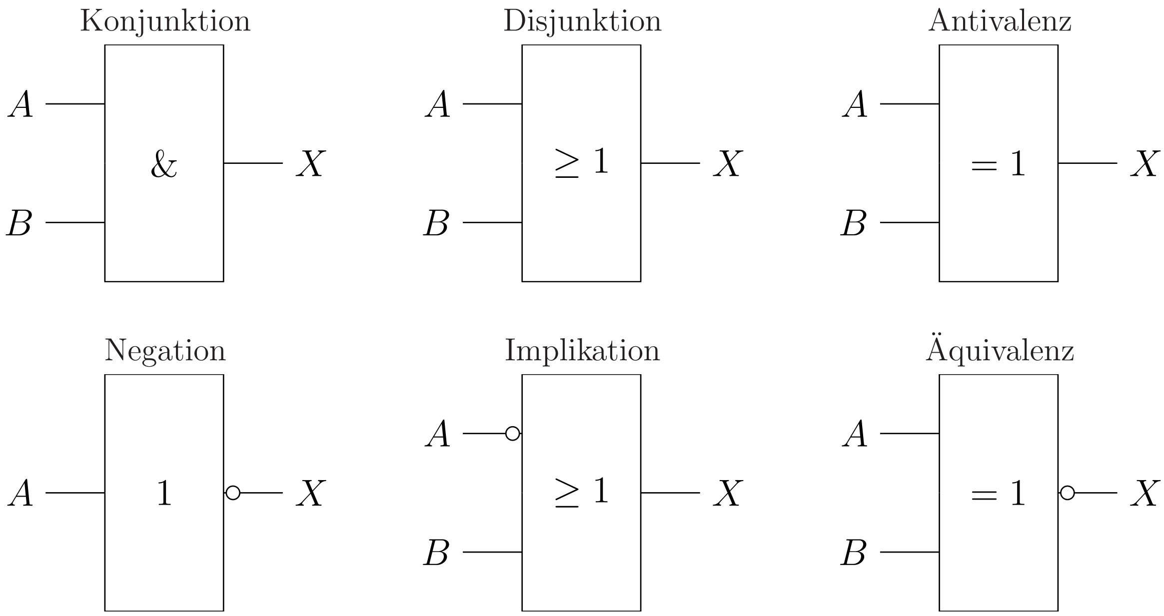


Implikation: $A \Rightarrow B$ bzw. $\neg A \vee B$



Die Schalter können z.B. durch Transistoren realisiert werden, die bei einer hohen oder niedrigen angelegten Spannung leiten. Der Wert w entspricht einer hohen Spannung (1), der Wert f einer niedrigen Spannung (0).

In DIN 40900 werden Symbole für die entsprechenden Schaltungen definiert. Diese bestehen aus Rechtecken, in denen die jeweilige Verknüpfung angegeben wird. Eine Negation wird durch einen Kreis gekennzeichnet.



1.1.3 Regeln für logische Operationen

Für logische Operationen gelten die folgenden Identitäten.

- Assoziativgesetze:

$$\begin{aligned} (A \wedge B) \wedge C &= A \wedge (B \wedge C) \\ (A \vee B) \vee C &= A \vee (B \vee C) \end{aligned}$$

- Kommutativgesetze:

$$\begin{aligned} A \wedge B &= B \wedge A \\ A \vee B &= B \vee A \end{aligned}$$

- De Morgansche Regeln:

$$\begin{aligned} \neg(A \wedge B) &= (\neg A) \vee (\neg B) \\ \neg(A \vee B) &= (\neg A) \wedge (\neg B) \end{aligned}$$

- Distributivgesetze:

$$\begin{aligned} (A \wedge B) \vee C &= (A \vee C) \wedge (B \vee C) \\ (A \vee B) \wedge C &= (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \end{aligned}$$

- Sonstige:

$$\begin{aligned} \neg(\neg A) &= A \\ A \wedge A &= A \\ A \vee A &= A \end{aligned}$$

- Alternative Darstellungen:

$$\begin{array}{rlcccc} \text{Implikation:} & A \Rightarrow B & = & \neg A \vee B & = & \neg A \Leftarrow \neg B \\ \text{Äquivalenz:} & A \Leftrightarrow B & = & (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) & & \\ \text{Antivalenz:} & A \not\equiv B & = & (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) & & \end{array}$$

Die alternativen Formulierungen werden oft in Beweisen benutzt.
Ein logischer Ausdruck, der unabhängig vom Wahrheitswert der auftretenden Aussagen immer wahr bzw. immer falsch ist, wird als Tautologie bzw. Kontradiktion bezeichnet. Ein solcher Ausdruck kann bei einer Umformung durch w (oder 1) bzw. f (oder 0) ersetzt werden. Insbesondere gelten die Identitäten:

$$\begin{array}{rcl} A \vee \neg A = \mathrm{w} & \text{bzw.} & A \wedge \neg A = \mathrm{f}\,, \\ A \vee \mathrm{w} = \mathrm{w} & \text{bzw.} & A \wedge \mathrm{w} = A\,, \\ A \vee \mathrm{f} = A & \text{bzw.} & A \wedge \mathrm{f} = \mathrm{f}\,. \end{array}$$

Beweis:

Die De Morganschen Regeln und die Distributivgesetze lassen sich zeigen, indem man alle Möglichkeiten für die Wahrheitswerte der Aussagen untersucht. Für die erste De Morgansche Regel ist dies in der folgenden Tabelle illustriert.

A	B	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg(A \wedge B)$, $(\neg A) \vee (\neg B)$
w	w	w	f	f	f
w	f	f	f	w	w
f	w	f	w	f	w
f	f	f	w	w	w

Die äquivalenten Beschreibungen für die Implikation, die Äquivalenz und die Antivalenz folgen unmittelbar aus den Definitionen.

Beispiel:

Zur Illustration der logischen Regeln wird die Aussage

$$\underbrace{|x-1| > 1}_{A} \Longrightarrow \underbrace{(x < 0) \vee (x > 2)}_{B}$$

umgeformt.
Anwendung der Morganschen Regel liefert

$$\neg B = \neg(x < 0) \wedge \neg(x > 2) = (x \geq 0) \wedge (x \leq 2)\,.$$

Folglich ist die Implikation $A \Rightarrow B$ äquivalent zu der Aussage

$$|x-1| \leq 1 \Longleftarrow 0 \leq x \leq 2\,.$$

Dieses Ergebnis erhält man auch, indem man die Implikation definitionsgemäß durch

$$(\neg A) \vee B = |x-1| \leq 1 \vee \neg(0 \leq x \leq 2)$$

ersetzt.

Beispiel:

Als Beispiel wird der Ausdruck

$$L : (A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge B)$$

vereinfacht. Ersetzen der Implikation und Anwendung der Morgan'schen Regeln ergibt

$$\neg(A \vee B) \vee (\neg A \wedge B) = (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)\,.$$

Nach dem Distributivgesetz ist dieser Ausdruck äquivalent zu

$$\neg A \wedge (\neg B \vee B)\,.$$

Man erkennt, dass der Wahrheitswert von B irrelevant ist und

$$L = \neg A\,.$$

Alternativ kann man zur Untersuchung des logischen Ausdrucks L auch eine Wahrheitstabelle verwenden.

A	B	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge B$	L
w	w	f	f	f
w	f	f	f	f
f	w	f	w	w
f	f	w	f	w

Es folgt ebenfalls $L = \neg A$.

1.1.4 Quantoren

Als Abkürzung für die Formulierungen

„es gibt ...“, „für alle ...“

werden der Existenzquantor $\exists$ und der Allquantor $\forall$ verwendet. Diese Quantoren werden häufig in Verbindung mit Aussagen $A(p)$ benutzt, die von einem Parameter p aus einer Menge P abhängen.

Schreibweise	Bedeutung
$\exists\, p \in P :\ A(p)$	es gibt mindestens ein p aus P, für das $A(p)$ wahr ist
$\forall\, p \in P :\ A(p)$	für alle p aus P ist $A(p)$ wahr

Bei der Negation der beiden Aussagentypen vertauschen sich die Quantoren:

$$\begin{aligned} \neg\big(\exists\, p \in P :\ A(p)\big) &= \forall\, p \in P :\ \neg A(p) \\ \neg\big(\forall\, p \in P :\ A(p)\big) &= \exists\, p \in P :\ \neg A(p) \end{aligned}$$

Gebräuchlich ist ebenfalls die Schreibweise $\exists!$ für die Formulierung „es gibt genau ein ...“.

Beispiel:

Zur Illustration des Quantorenkalküls wird die Aussage

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, n_\varepsilon\; \forall\, n \in \mathbb{N}:\; n > n_\varepsilon \Longrightarrow |a_n| < \varepsilon$$

betrachtet. Sie bedeutet, dass die Folge

$$a_1, a_2, \ldots$$

gegen 0 strebt, das heißt für hinreichend großes n wird der Betrag von a_n kleiner als jede vorgegebene Schranke ε.
Die Negation erhält man, indem die Kernaussage negiert und die Quantoren ersetzt,

$$\exists \leftrightarrow \forall\,.$$

Ersetzen der Implikation und Anwendung der Morganschen Regel ergibt

$$\neg(n > n_\varepsilon \Longrightarrow |a_n| < \varepsilon) = \neg(n \le n_\varepsilon \vee |a_n| < \varepsilon) = n > n_\varepsilon \wedge |a_n| \ge \varepsilon\,.$$

Damit hat die negierte Aussage die Form

$$\exists\, \varepsilon > 0\; \forall\, n_\varepsilon\; \exists\, n \in \mathbb{N}:\; n > n_\varepsilon \wedge |a_n| \ge \varepsilon\,.$$

Dies bedeutet, dass die Folge (a_n) nicht gegen 0 konvergiert, d.h. es existiert ein Wert $\varepsilon > 0$, der von der Folge $|a_n|$ immer wieder überschritten wird.

1.1.5 Direkter Beweis

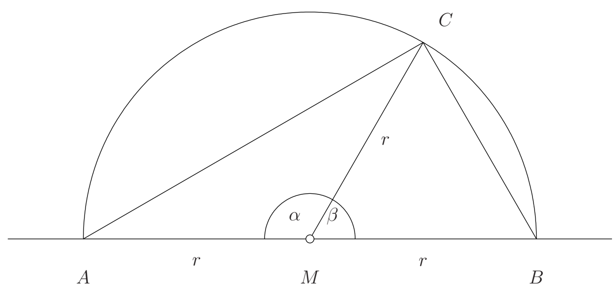
Eine Behauptung B kann bewiesen werden, indem sie aus bekannten wahren Aussagen A hergeleitet oder auf solche zurückgeführt wird:

$$A \Longrightarrow B\,.$$

Die Aussagen A können dabei auch Voraussetzungen beinhalten, die für die Gültigkeit der Behauptung B notwendig sind.

Beispiel:

Als Beispiel wird der Satz des Thales gezeigt. Dieser besagt, dass alle einem Halbkreis einbeschriebenen Dreiecke rechtwinklig sind.



Der direkte Beweis stützt sich auf zwei Sätze:

(i) Die Winkelsumme in einem Dreieck ist π.

(ii) Die Basiswinkel bei einem gleichschenkligen Dreieck sind gleich.

Angewandt auf die Dreiecke $\Delta(AMC)$ und $\Delta(CMB)$ folgt daraus

$$\sphericalangle ACM = \frac{\pi - \alpha}{2}, \qquad \sphericalangle MCB = \frac{\pi - \beta}{2}.$$

Damit ist

$$\sphericalangle ACB = \pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$$

und wegen $\alpha + \beta = \pi$ also gleich $\pi/2$.

1.1.6 Indirekter Beweis

Um zu zeigen, dass aus Voraussetzungen V eine Behauptung B folgt ($V \implies B$), kann man die Annahme, dass die Aussage B bei Gültigkeit der Voraussetzungen V falsch ist, zu einem Widerspruch führen:

$$V \wedge (\neg B) \implies F\,,$$

mit einer falschen Aussage F, insbesondere $F = \neg V$ oder $F = B$.
Speziell gilt

$$B = (\neg B \Longrightarrow F) \;=\; (\neg B \Rightarrow B)\,,$$

falls keine Voraussetzungen getroffen sind.

Erläuterung:

Die Implikation

$$V \wedge (\neg B) \implies F$$

ist äquivalent zu

$$\neg(V \wedge (\neg B)) \vee F = (\neg V) \vee B \vee F\,.$$

Ist die Implikation wahr, das heißt wurde sie aus gültigen mathematischen Gesetzen gefolgert, so muss die Behauptung B wahr sein, denn $\neg V$ ist falsch und F ist entweder falsch oder gleich B.

Beispiel:

Zur Illustration der indirekten Beweismethode wird gezeigt, dass $\sqrt{2}$ irrational ist, d.h. nicht als Bruch darstellbar ist.
Man nimmt an, dass die Behauptung B falsch ist. Es gelte also

$$\neg B:\ \sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad \text{mit } p, q \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{ggT}(p,q) = 1\,.$$

Dabei bezeichnet ggT den größten gemeinsamen Teiler.
Aus der Annahme folgt durch Quadrieren und Multiplikation mit q^2

$$2q^2 = p^2\,,$$

d.h. p^2 und damit auch p ist eine gerade Zahl. Insbesondere existiert ein $r \in \mathbb{N}$ mit $p = 2r$. Wegen

$$q^2 = 2r^2$$

ist q ebenfalls gerade, und damit besitzen p und q den gemeinsamen Teiler 2. Dies steht im Widerspruch zu dem Bestandteil der Annahme $\neg B$, dass $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$, d.h.

$$(\neg B) \Longrightarrow B\,.$$

Folglich muss die Behauptung B wahr sein.

1.1.7 Vollständige Induktion

Aussageformen mit natürlichen Zahlen als Parametern kann man mit vollständiger Induktion beweisen. Ist $A(n)$ eine von $n \in \mathbb{N}$ abhängige Aussage, so sind dazu die folgenden beiden Beweisschritte durchzuführen.

- Induktionsanfang: Man zeigt, dass $A(1)$ richtig ist.
- Induktionsschluss: Man zeigt, dass aus der Annahme, dass $A(n)$ richtig ist (Induktionshypothese), folgt, dass auch $A(n + 1)$ richtig ist, d.h.

$$A(n) \quad\Longrightarrow\quad A(n + 1)\,.$$

Dann ist gewährleistet, daß $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Bei einem Induktionsbeweis wird sukzessive das Nächste aus dem Vorherigen gefolgert. Wird der Induktionsanfang nicht für $n_0 = 1$, sondern für ein $n_0 > 1$ durchgeführt, so gilt die Aussage nur für alle $n \geq n_0$.

Beispiel:

Die Formel für die Summe der Quadratzahlen,

$$A(n) : \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n + 1)(2n + 1)\,,$$

kann mit vollständiger Induktion bewiesen werden.
Induktionsanfang ($A(1)$):

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}\,.$$

Induktionsschluß ($A(n) \implies A(n + 1)$):

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n + 1)^2 = \underbrace{\frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}}_{A(n)} + (n + 1)^2 \\ &= \frac{(n + 1)\big[n(2n + 1) + 6(n + 1)\big]}{6} = \frac{(n + 1)(n + 2)(2n + 3)}{6}\,.\end{aligned}$$

Die Induktionshypothese wurde, wie angedeutet, bei der dritten Gleichheit benutzt.

1.2 Mengen

1.2.1 Menge

Eine Menge A besteht aus verschiedenen Elementen $a_1, a_2, \ldots$:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots\}\,.$$

Werden die Elemente durch eine Eigenschaft E charakterisiert, so schreibt man

$$A = \{a : \ a \text{ besitzt die Eigenschaft } E\}\,.$$

Die Reihenfolge der Elemente ist dabei unerheblich.

Man verwendet folgende Bezeichnungen:

Schreibweise	Bedeutung
$a \in A$	a ist Element von A
$a \notin A$	a ist nicht Element von A
$A \subseteq B$	A ist Teilmenge von B
$A \not\subseteq B$	A ist keine Teilmenge von B
$A \subset B$	A ist echte Teilmenge von B
$\lvert A\rvert$	Anzahl der Elemente in A
$\emptyset$	leere Menge

Gilt $|A| < \infty$ bzw. $= \infty$, so spricht man von einer endlichen bzw. unendlichen Menge. Mengen heißen gleichmächtig, wenn es eine bijektive Abbildung zwischen ihren Elementen gibt ($|A| = |B|$ für endliche Mengen).
Die Menge $\mathcal{P}(A)$ aller Teilmengen von A wird als Potenzmenge bezeichnet, d.h. $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$. Dabei gilt $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$, $A \in \mathcal{P}(A)$ und $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Beispiel:

Eine endliche Menge kann durch Auflisten aller Elemente angegeben werden, z.B.

$$\{1, 2, 3, 4\}\ .$$

Es ist auch möglich eine Menge als Teilmenge einer Obermenge anzugeben. Dabei werden von der Teilmenge spezielle Eigenschaften gefordert. Die Menge

$$\left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 7\right\}$$

beschreibt zum Beispiel alle reellen Zahlen, deren Quadrat die Zahl 7 ergibt. Eine weitere Möglichkeit um eine unendliche Menge zu beschreiben ist die Angabe von einigen Elementen und Fortsetzungspunkten. Dabei muss das Gesetz nach dem die weiteren Elemente gebildet werden jedoch klar ersichtlich sein. Die Menge aller geraden natürlichen Zahlen

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ gerade }\}$$

lässt auf diese Weise auch durch

$$\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

ausdrücken.

1.2.2 Zahlenmengen

Für folgende Zahlenmengen benutzt man Standardbezeichnungen.

- natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$
- ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$
- rationale Zahlen: $\mathbb{Q} = \{p/q :\ p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{N},\, \mathrm{ggT}(p, q) = 1\}$
- reelle Zahlen: $\mathbb{R} = \{x :\ x = \lim_{n\to\infty} q_n,\, q_n \in \mathbb{Q}\}$
- komplexe Zahlen: $\mathbb{C} = \{x + \mathrm{i}y :\ x, y \in \mathbb{R},\, \mathrm{i}^2 = -1\}$

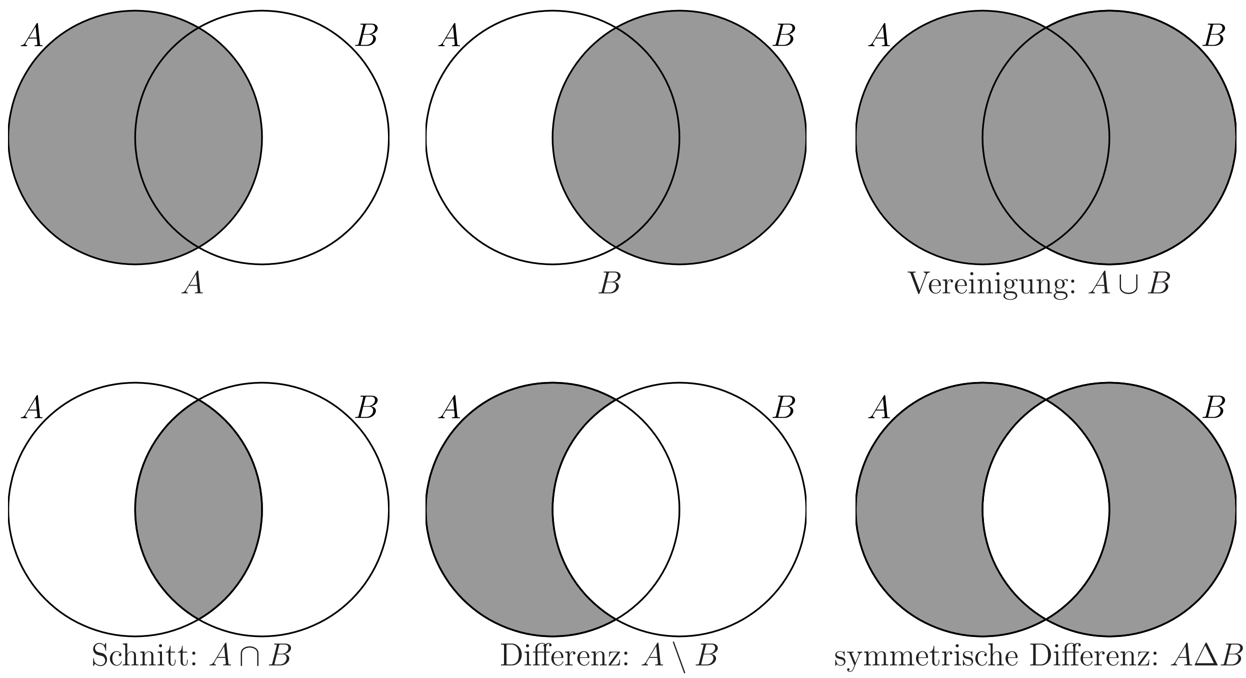
Gebräuchlich sind ebenfalls die Schreibweisen $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} :\ x > 0\}$ und dazu entsprechend $\mathbb{Z}^-$, $\mathbb{Z}_0^-$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}_0^+$, $\mathbb{Q}^-$, $\mathbb{Q}_0^-$ $\mathbb{R}_0^+$, $\mathbb{R}^-$, $\mathbb{R}_0^-$.

1.2.3 Mengenoperationen

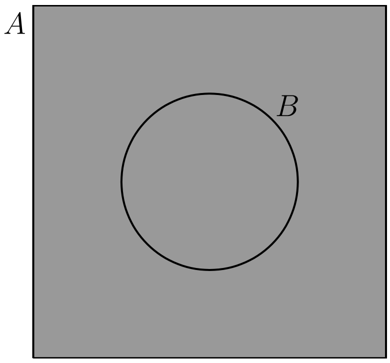
Für zwei Mengen A und B sind die folgenden Operationen definiert.

- Vereinigung:
$$A \cup B = \{x :\ x \in A \ \vee\ x \in B\}\,,$$
- Durchschnitt:
$$A \cap B = \{x :\ x \in A \ \wedge\ x \in B\}\,,$$
- Differenz, Komplementärmenge:
$$A \setminus B = \{x :\ x \in A \ \wedge\ x \notin B\}\,,$$
- symmetrische Differenz:
$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

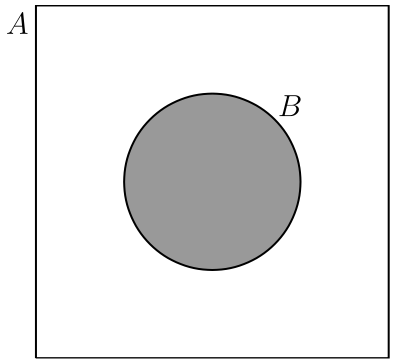
In der Abbildung sind die Mengenoperationen mit Hilfe sogenannter Venn-Diagramme illustriert.



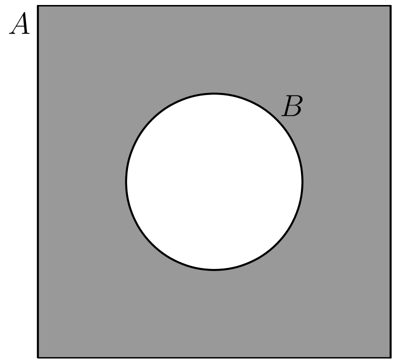
Ist $B \subset A$, fallen einige der Diagramme zusammen:



Vereinigung: $A = A \cup B$



Schnitt: $B = A \cap B$



Komplementärmenge : $A \setminus B = A \Delta B$

1.2.4 Regeln für Mengenoperationen

Für Mengenoperationen gelten die folgenden Identitäten.

- Assoziativgesetze:

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C)\\ (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C)\end{aligned}$$

- Kommutativgesetze:

$$\begin{aligned}A \cap B &= B \cap A\\ A \cup B &= B \cup A\end{aligned}$$

- Morgansche Regeln:

$$\begin{aligned}C\backslash(A \cap B) &= (C\backslash A) \cup (C\backslash B)\\ C\backslash(A \cup B) &= (C\backslash A) \cap (C\backslash B)\end{aligned}$$

- Distributivgesetze:

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C)\\ (A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C)\end{aligned}$$

Diese Regeln entsprechen den Gesetzen für logische Operationen, wenn man die Operatoren $\cup, \cap$ durch $\wedge, \vee$ ersetzt und $C\backslash$ durch $\neg$.

Beweis:

Exemplarisch wird die erste De Morgansche Regel bewiesen. Es gilt

$$\begin{aligned}x \in C\backslash(A \cap B) &\Leftrightarrow x \in C \wedge x \notin (A \cap B)\\ &\Leftrightarrow x \in C \wedge (x \notin A \vee x \notin B)\,.\end{aligned}$$

Nach den Distributivgesetzen ist der letzte Ausdruck äquivalent zu

$$(x \in C \wedge x \notin A) \vee (x \in C \wedge x \notin B) \Leftrightarrow x \in (C\backslash A \cup C\backslash B)\,,$$

womit die behauptete Identität gezeigt ist.

Beispiel:

Mit den De Morganschen Regeln folgt beispielsweise

$$\begin{aligned} C \setminus (A \cap C) &= (C \setminus A) \cup (C \setminus C) = (C \setminus A) \cup \emptyset = C \setminus A\,, \\ C \setminus (A \cup C) &= (C \setminus A) \cap (C \setminus C) = (C \setminus A) \cap \emptyset = \emptyset\,. \end{aligned}$$

Aus den Distributivgesetzen folgt beispielsweise

$$(A \cup B) \cap B = (A \cap B) \cup (B \cap B) = (A \cap B) \cup B\,.$$

Hierbei gilt $(A \cap B) \cup B = B$, da $(A \cap B) \subseteq B$.

1.2.5 Kartesisches Produkt

Das kartesische Produkt zweier Mengen A und B ist die Menge aller geordneten Paare von Elementen der beiden Mengen:

$$A \times B = \{(a,b) :\ a \in A \wedge b \in B\}\,.$$

Es gilt

$$(a,b) = (a',b') \Leftrightarrow (a = a' \wedge b = b')\,.$$

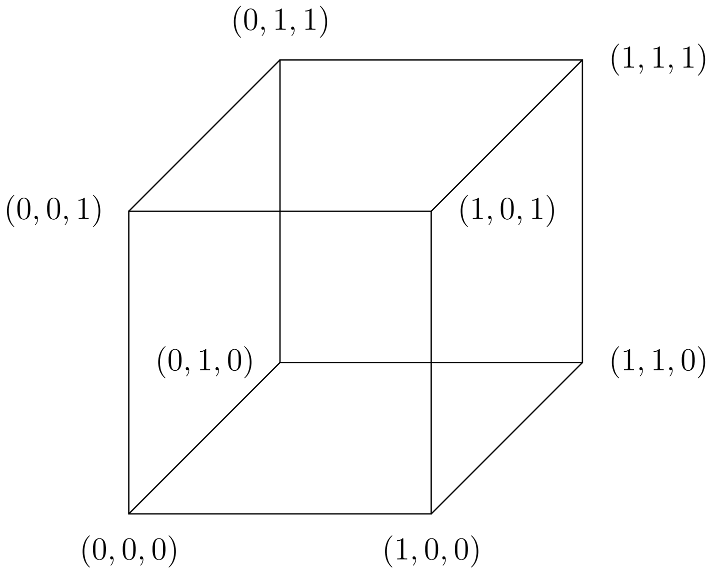
d.h. im Gegensatz zu der Gleichheit von Mengen ($\{a,b\} = \{b,a\}$) ist die Reihenfolge wesentlich.
Für endliche Mengen gilt $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.
Entsprechend definiert man das n-fache kartesische Produkt

$$A_1 \times \cdots \times A_n$$

als die Menge aller geordneten Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ mit $a_i \in A_i$. Sind die Mengen gleich, so schreibt man $A^n = A \times \cdots \times A$.

Beispiel:

Die Eckpunkte eines Würfels lassen sich als 3–faches kartesisches Produkt der Menge $M = \{0,1\}$ mit sich selbst beschreiben, denn $M \times M \times M = \{(m_1, m_2, m_3) | (m_1 \in M) \wedge (m_2 \in M) \wedge (m_3 \in M)\}$



1.2.6 Relation

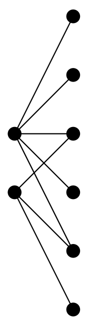
Stehen Elemente einer Menge A in Beziehung zu Elementen aus einer Menge B, so kann dies mit Hilfe einer Relation ausgedrückt werden. Diese besteht aus geordneten Paaren (a, b) der Elemente, die durch die Beziehung verknüpft sind. Eine Relation R ist also eine Teilmenge des kartesischen Produkts von A und B. Man sagt a steht in Relation zu b und schreibt $a\,\mathrm{R}\,b$:

$$a\,\mathrm{R}\,b \Leftrightarrow (a, b) \in R \subseteq A \times B\,.$$

1.2.7 Relationale Datenbank

Ein typisches Anwendungsbeispiel sind die sogenannten relationalen Datenbanken. Hier stehen beispielsweise eine Tabelle mit Vorlesungen und eine Tabelle von Studierenden in Beziehung zueinander. Dies ist in der folgenden Abbildung illustriert.

Vorlesung	**Raum**
Höhere Mathematik I	V57.01
Knigge für Studierende	V47.02



Mtr.-Nr.	**Name**
1000000	Anton Antonius
1000001	Berta Bethel
1000002	Cornelius Cornell
1000003	Damian Damien
1000004	Egon Ekel
1000005	Frank Frankfurth

Es wird auch deutlich, dass ein Element aus der einen Menge in Relation zu mehreren Elementen der anderen Menge stehen kann.

1.2.8 Eigenschaften von Relationen

Eine Relation $R \subseteq A^2$ in einer Menge A heißt

- reflexiv, wenn jedes Element in Relation zu sich selbst steht: $\forall a \in A : (a, a) \in R$
- symmetrisch, wenn die Reihenfolge der Elemente keine Rolle spielt: $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$
- antisymmetrisch, wenn aus der Symmetrie die Identität folgt: $(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$
- transitiv, wenn aus einer Kette das mittlere Element entfernt werden kann: $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$
- total, wenn je zwei Elemente in mindestens einer Richtung in Relation stehen: $\forall a, b \in A : (a, b) \in R \vee (b, a) \in R$

Ist eine Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv, so wird sie Äquivalenzrelation genannt. Es wird dann meist $a \sim b$ statt $a\,\mathrm{R}\,b$ geschrieben. Eine Äquivalenzrelation unterteilt die Menge A in disjunkte Teilmengen (Äquivalenzklassen), wobei zwei Elemente einer Teilmenge zueinander

in Relation stehen (äquivalent sind), während zwei Elemente aus unterschiedlichen Teilmengen dies nicht tun.
Ist eine Relation reflexiv, antisymmetrisch und transitiv, so ist sie eine Halbordnung und man schreibt meist $a \leq b$ statt $a \,\mathrm{R}\, b$. Ist eine Halbordnung zusätzlich total, heißt sie (totale) Ordnung und A heißt durch $\leq$ geordnet.

Beispiel:

Die Mengeninklusion $\subseteq$ ist eine Halbordnung in der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M denn es gilt: $A \subseteq A$ (reflexiv), $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$ (antisymmetrisch) und $A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ (transitiv). Hat M mehr als ein Element, so ist die Inklusion aber keine Ordnung, denn dann gilt für

$$a, b \in M, a \neq b : \{a\} \not\subseteq \{b\} \wedge \{b\} \not\subseteq \{a\}\,,$$

das heißt sie ist nicht total.
Die Relation „hat gleich viele Elemente wie“ ist eine Äquivalenzrelation in der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer endlichen Menge M denn es gilt: $|A| = |A|$(reflexiv), $|A| = |B| \Rightarrow |B| = |A|$ (symmetrisch) und $|A| = |B| = |C| \Rightarrow |A| = |C|$ (transitiv).

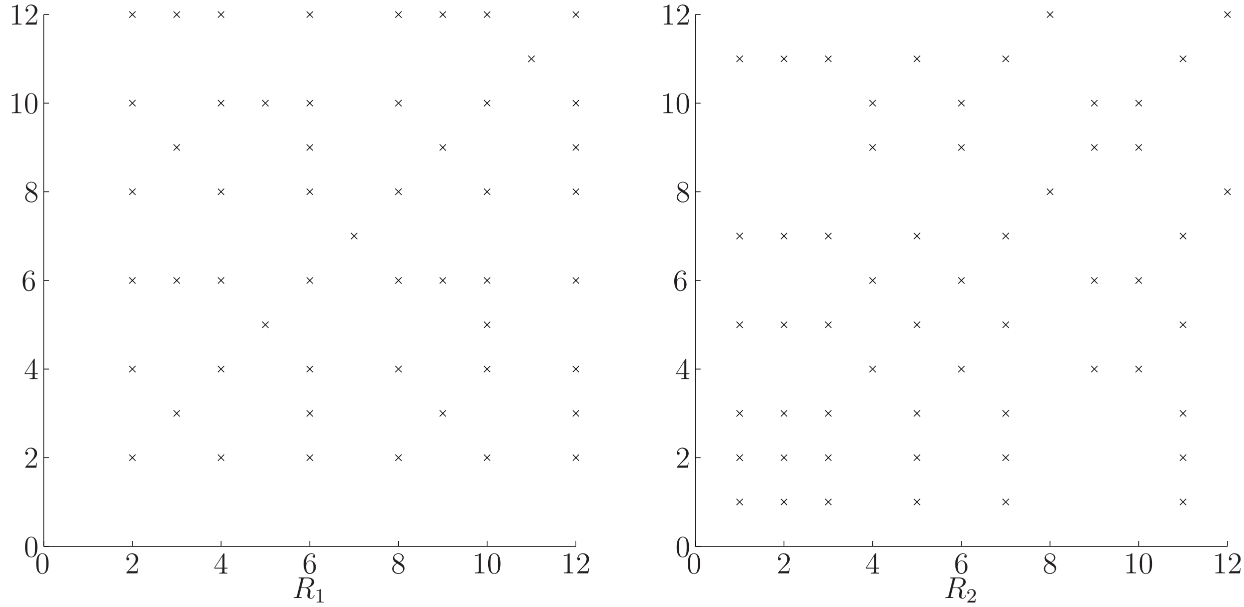
Beispiel:

Relationen bzw. Äquivalenz-Relationen auf Mengen werden oft durch Eigenschaften der Elemente definiert. Als Beispiel werden zwei Relationen auf

$$M = \{1, 2, \ldots, 12\}$$

betrachtet:

- $x\ R_1\ y$: x und y haben einen gemeinsamen Teiler $\neq 1$
- $x\ R_2\ y$: x und y haben gleichviele Teiler



Die Abbildung zeigt den Graph der Relationen als Teilmenge von $M \times M$. Die Relation R_1 ist symmetrisch, aber weder reflexiv ($(1,1) \notin R_1$) noch transitiv. Zum Beispiel haben $x = 4$ und $y = 6$ den gemeinsamen Teiler 2 und $y = 6$ und $z = 9$ den gemeinsamen Teiler 3, aber $x = 4$ und $z = 9$ haben keinen gemeinsamen Teiler. Also gilt

$$(xR_1y \wedge yR_1z) \Rightarrow xR_1z$$

nicht.
Die Relation R_2 ist eine Äquivalenz-Relation. Reflexivität, Symmetrie und Transitivität sind offensichtlich erfüllt. Die Äquivalenzklassen sind

$$\{1\}, \{2,3,5,7,11\}, \{4,9\}, \{6,8,10\}, \{12\}$$

mit einem, zwei, drei, vier und sechs Teilern.

1.3 Abbildungen

1.3.1 Abbildung

Unter einer Abbildung f von einer Menge A in eine Menge B versteht man eine Vorschrift, die jedem $a \in A$ eindeutig ein bestimmtes $b = f(a) \in B$ zuordnet:

$$f : A \longrightarrow B\,.$$

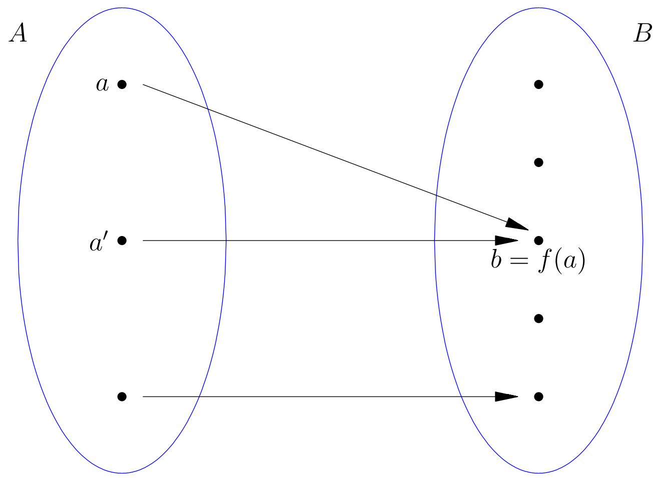
Für die Elementzuordnung verwendet man die Schreibweise

$$a \mapsto b = f(a)$$

und bezeichnet b als das Bild von a, bzw. a als ein Urbild von b.

Ist $M \subseteq A$, so heißt $f(M) = \{f(m)|m \in M\} \ \subseteq\ B$ das Bild von M und für $N \subseteq B$ heißt $f^{-1}(N) = \{a|f(a) \in N\} \ \subseteq\ A$ das Urbild von N unter der Abbildung f.
Die Menge $f(A)$ heißt Wertebereich und A Definitionsbereich der Abbildung f.

Eine Abbildung kann man folgendermaßen illustrieren.



Wie aus dem Bild ersichtlich ist, müssen nicht alle Elemente aus B als Bild eines Elementes aus A auftreten und ein Element aus B darf auch Bild mehrerer Elemente aus A sein. Es muss allerdings für jedes Element aus A ein eindeutiges Bild geben, das heißt von jedem a muss genau ein Pfeil ausgehen.

Man erkennt auch, dass ein Bild b mehrere Urbilder haben kann, hier beispielsweise a und a'.

Statt Abbildung verwendet man auch den Begriff Funktion, insbesondere in der reellen und komplexen Analysis.

1.3.2 Eigenschaften von Abbildungen

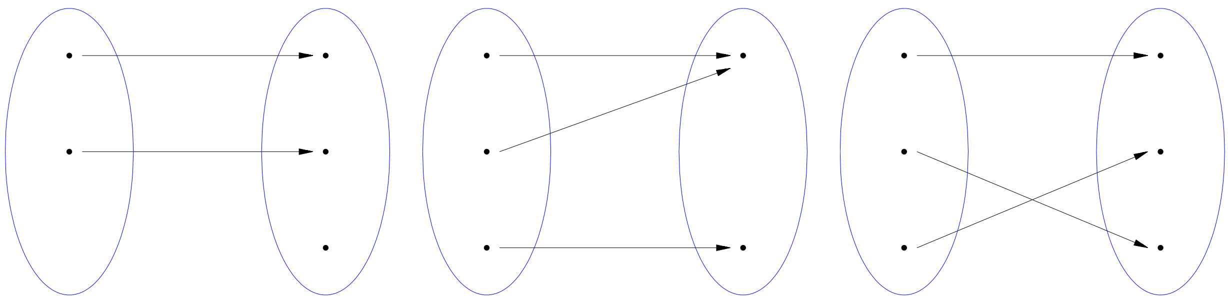
Eine Abbildung

$$f : A \longrightarrow B$$

zwischen zwei Mengen A und B heißt

- injektiv, falls $f(a) \neq f(a')$ für alle $a, a' \in A$ mit $a \neq a'$
- surjektiv, falls es für jedes $b \in B$ ein $a \in A$ gibt mit $f(a) = b$
- bijektiv, falls f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

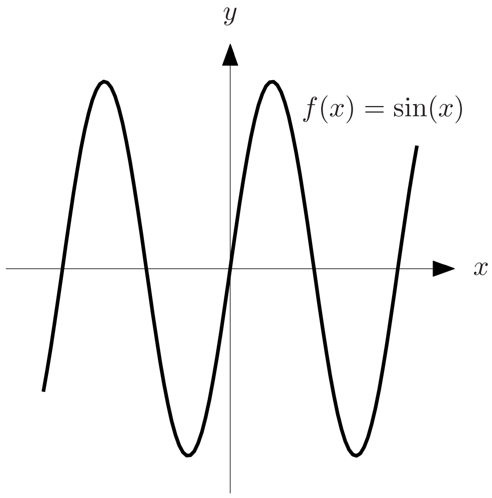
Diese Begriffe lassen sich anhand von Mengendiagrammen illustrieren:



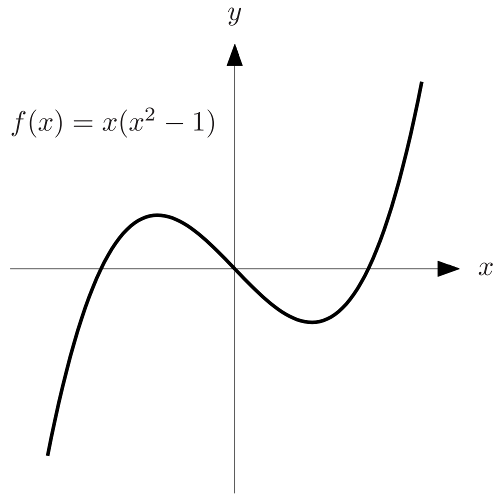
injektiv surjektiv bijektiv

Beispiel:

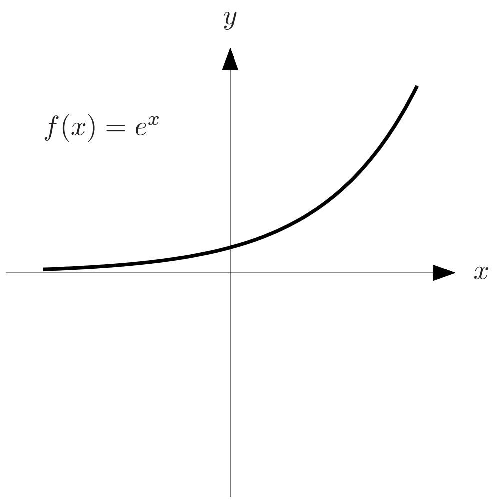
Angegeben sind die Eigenschaften einiger Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



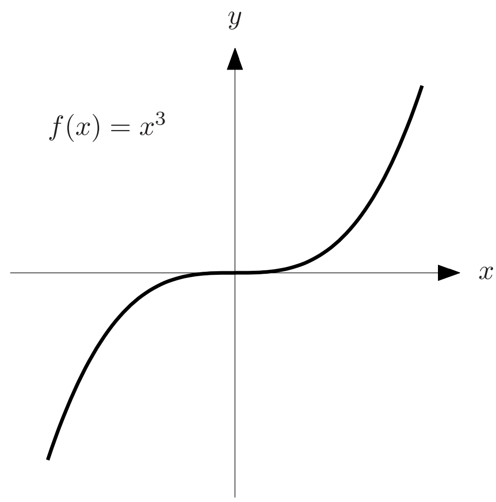
weder injektiv, noch surjektiv



surjektiv, aber nicht injektiv



nicht surjektiv, aber injektiv



bijektiv, d.h. injektiv und surjektiv

1.3.3 Verknüpfung von Abbildungen

Die Verknüpfung oder Komposition zweier Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ ist durch

$$a \mapsto (g \circ f)(a) = g(f(a)), \quad a \in A\,,$$

definiert und in dem folgendem Diagramm veranschaulicht.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

Die Verknüpfung $\circ$ ist assoziativ, d.h.

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

aber nicht kommutativ, also ist im Allgemeinen $f \circ g \neq g \circ f$.

Beispiel:

Für die Abbildungen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x + 1$ und $g(x) = x^2$ gilt:

$$(f \circ g)(x) = x^2 + 1 \ \neq\ (x + 1)^2 = (g \circ f)(x).$$

Die Verkettung dieser Funktionen ist also nicht kommutativ.

1.3.4 Inverse Abbildung

Für eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ ist durch

$$b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$$

die inverse Abbildung $f^{-1} : B \to A$ definiert.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] & & B \arrow[ll, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Insbesondere ist $a = f^{-1}(f(a))$, d.h. $f^{-1} \circ f$ ist die identische Abbildung.

Beispiel:

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$ ist bijektiv und besitzt die inverse Abbildung $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Die Funktion $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ g(x) = \ln(x)$, ist ebenso bijektiv und hat als Inverse die Abbildung $g^{-1} : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ mit $g^{-1}(x) = e^x$.

1.4 Kombinatorik

1.4.1 Fakultät

Das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen wird mit

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n$$

bezeichnet (lies: n Fakultät). Konsistent mit der Definition des leeren Produktes setzt man $0! = 1$.
Die Zahl $n!$ entspricht der Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten n unterschiedliche Objekte anzuordnen.
Für großes n kann das asymptotische Verhalten von $n!$ mit Hilfe der Stirlingschen Formel approximiert werden:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O(1/n)\right).$$

1.4.2 Permutationen und symmetrische Gruppe

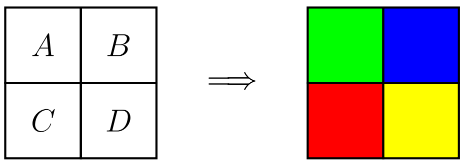
Für eine beliebige Menge M bilden die Bijektionen von M in M, versehen mit der Komposition von Abbildungen als Operation, eine Gruppe, die sogenannte symmetrische Gruppe von M. Ist $M = \{1, 2, \ldots, n\}$, so spricht man von der symmetrischen Gruppe S_n vom Grad n. Die $n!$ Elemente π von S_n nennt man Permutationen und benutzt die Schreibweise

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

Dabei stehen in der oberen Zeile die Elemente der Menge in der natürlichen Reihenfolge, darunter dann jeweils ihre Bilder unter π.

Die Permutationsgruppe ist im Allgemeinen nicht kommutativ.

Beispiel:



Ein Quadrat das in die vier Felder A, B, C, D unterteilt ist soll mit den Farben Rot, Blau, Grün und Gelb so ausgemalt werden, dass je zwei Felder unterschiedlich gefärbt sind. Es gibt dann $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ verschiedene Farbgestaltungen.

Beispiel:

Die folgende Tabelle zeigt alle Permutationen von $\{1, 2, 3\}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Im allgemeinen ist die Hintereinanderschaltung von Permutationen nicht kommutativ. Beispielsweise erhält man für

$$f: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad g: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

die Verknüpfungen:

$$f \circ g \quad : \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g \circ f \quad : \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1.4.3 Binomialkoeffizient

Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq k$ definiert man den Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdots(k-2)(k-1)k} \,.$$

Wegen $0! = 1$ gilt insbesondere:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1, \quad \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gibt die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge mit n Elementen an.

1.4.4 Pascalsches Dreieck

Die Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

lassen sich mit Hilfe der Rekursion

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

in einem Dreiecksschema, dem sogenannten Pascalschen Dreieck, berechnen.

$$\begin{array}{c|ccccccccccc}
\binom{0}{k} & & & & & & 1 & & & & & \\
\binom{1}{k} & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
\binom{2}{k} & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
\binom{3}{k} & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
\binom{4}{k} & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
 & & \swarrow & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow \\
\binom{5}{k} & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Beweis:

Die zu beweisende Identität
$$\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\,k!} = \frac{n!}{(n-k+1)!\,(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$
ist nach Division durch $n!$ und Multiplikation mit $(n-k+1)!\,k!$ äquivalent zu
$$n+1 = k + (n+1-k)\,.$$

1.4.5 Binomischer Lehrsatz

Mit der binomischen Formel lassen sich Potenzen einer Summe von zwei Variablen berechnen. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt
$$\begin{aligned}(a+b)^n &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k.\end{aligned}$$
Insbesondere ist für $n = 2, 3$
$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2\,, \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\,.\end{aligned}$$

Beweis:

Der binomische Lehrsatz kann mit vollständiger Induktion bewiesen werden.
Für $n = 0$ und $n = 1$ ist die Identität wegen
$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k}b^k = \binom{0}{0} a^0b^0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k}b^k = a+b$$
für beliebige a und b richtig.
Angenommen sie gelte für n. Dann ist
$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)\,(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^{k+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k}b^{k+1} + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1}b^k + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] a^{n+1-k}b^k + b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k}b^k\end{aligned}$$

1.4.6 Identitäten für Binomialkoeffizienten

Für Binomialkoeffizienten gelten folgende Identitäten:

$$\begin{aligned}
2^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\,, \\
0 &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k\,, \quad n \geq 1\,, \\
\binom{n}{k} &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n-k-1+i}{i}\,, \quad k < n\,, \\
\binom{n}{k} &= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{k-1+i}{i}\,, \quad k > 0\,.
\end{aligned}$$

Beweis:

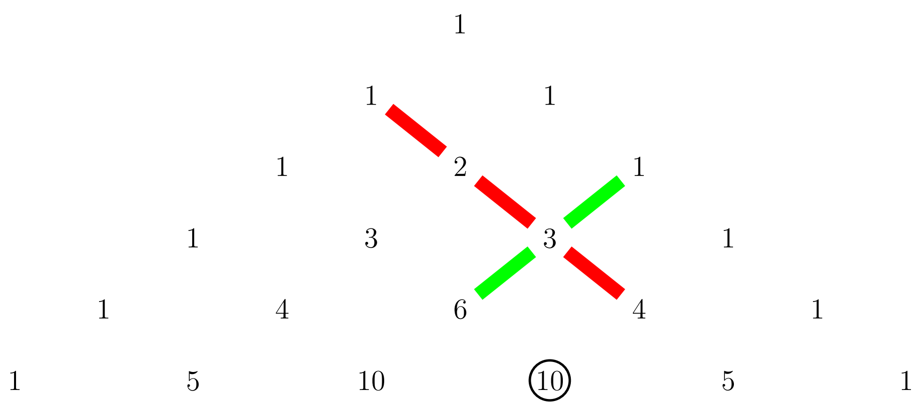
Die ersten beiden Identitäten folgen unmittelbar aus dem Binomischen Lehrsatz,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\,,$$

mit der Wahl $a = b = 1$ bzw. $a = -b = 1$.
Die dritte Identität folgt durch wiederholte Anwendung der Rekursionsformel:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \\
&= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} \\
&= \ldots \\
&= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \ldots + \binom{n-k-1}{0} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n-k-1+i}{i}\,.
\end{aligned}$$

Durch die Substitution $(n-k) \leftrightarrow k$ in dieser Gleichung ergibt sich die vierte Identität.
Die beiden letzten Identitäten können als Summationswege im Pascalschen Dreieck dargestellt werden.



1.4.7 Kombinatorik von Mengen

Die folgende Tabelle gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, aus einer Menge mit n verschiedenen Elementen k Elemente auszuwählen, wobei unterschieden werden muß, ob die Reihenfolge eine Rolle spielt (sortiert) und Wiederholungen zugelassen sind.

	sortiert	nicht sortiert
mit Wiederholungen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
ohne Wiederholungen	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$

Beweis:

i) unsortierte Auswahl ohne Wiederholungen

Berücksichtigt man die Reihenfolge, so gibt es n Möglichkeiten für das erste, $(n-1)$ Möglichkeiten für das zweite, bis hin zu $(n-k+1)$ Möglichkeiten für das k-te Element, also insgesamt

$$n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

Möglichkeiten. Diese Anzahl muß noch durch die Anzahl

$$k!$$

der Permutationen von k Elementen dividiert werden.

ii) unsortierte Auswahl mit Wiederholungen

Ein äquivalentes Problem ist, $n-1$ Markierungen zwischen $n+k$ Punkten zu plazieren.

Die um 1 verminderte Anzahl der Punkte zwischen der $(i-1)$-ten und i-ten Markierung entspricht den Wiederholungen des i-ten Elements. Nach **i)** ergibt sich für die Anzahl der möglichen Markierungen

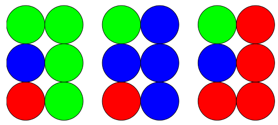
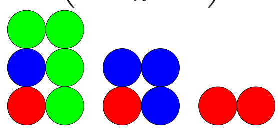
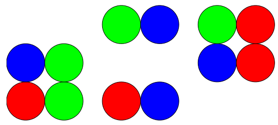
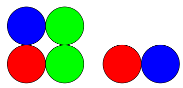
$$\binom{n+k-1}{n-1},$$

was mit der in der Tabelle angegebenen Zahl übereinstimmt.

iii) Die Formeln für die sortierte Auswahl ergeben sich unmittelbar.

Beispiel:

In einer Urne befinden sich eine rote, eine grüne und eine blaue Kugel. In der Tabelle sieht man die Anzahl der Möglichkeiten bei zweimaligem Ziehen ($n = 3$, $k = 2$).

	sortiert	nicht sortiert
mit Wiederholungen (mit Zurücklegen)	n^k  $3^2 = 9$	$\binom{n+k-1}{k}$  $\binom{3+2-1}{2} = 6$
ohne Wiederholungen (ohne Zurücklegen)	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$  $3 \cdot 2 = 6$	$\binom{n}{k}$  $\binom{3}{2} = 3$

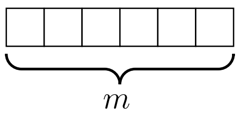
1.4.8 Zerlegung einer natürlichen Zahl

Auf wie viele verschiedene Arten lässt sich die Zahl m als Summe von n-Zahlen $a_i \geq 0$ schreiben, wobei die Reihenfolge zu beachten ist? Es wird also die Anzahl der $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ mit $a_i \geq 0$ und

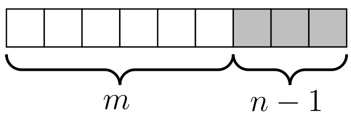
$$\sum_{i=1}^{n} a_i = m$$

gesucht.

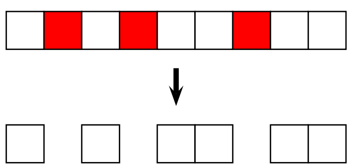
Um die Frage zu lösen stellt man sich die Zahl m als eine Folge von m Kästchen vor:



An diese m Kästchen werden nun $n-1$ Kästchen angehängt:



Von diesen $m+n-1$ Kästchen werden nun $n-1$ beliebige Kästchen entfernt, z.B.



Das Ergebnis sind insgesamt m Kästchen die in n Blöcke zerlegt sind. Die vorangegangen Bilder sind ein Beispiel für die Zerlegung von $m = 6$ in $n = 4$ Zahlen und entspricht der Zerlegung $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 2$ also $6 = 1 + 1 + 2 + 2$.

Es sind noch die folgenden Sonderfälle zu beachten:

- Werden x nebeneinander liegende Kästchen entfernt, dann entspricht das an entsprechender Stelle $x - 1$ Blöcken der Länge Null und es müssen in der Zerlegung $x - 1$ Nullen eingefügt. Es sind also z.B. für $m = 6$ und $n = 4$

  Zerlegungen in $6 = 1 + 0 + 4 + 1$ und $6 = 1 + 0 + 0 + 5$.

- Werden die ersten oder die letzte x-Kästchen entfernt, dann beginnt, bzw. endet die Zerlegung mit x Nullen, z.B.

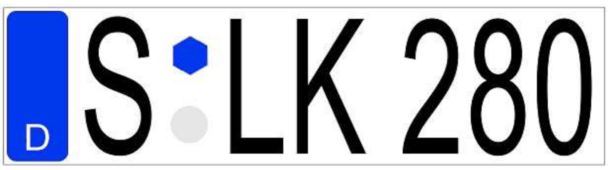
  entspricht $6 = 0 + 1 + 3 + 2$ und $6 = 2 + 4 + 0 + 0$.

Man sieht, dass unterschiedliche Arten die Kästchen zu entfernen auch unterschiedliche Zerlegungen liefern. Außerdem lässt sich jede Zerlegung von m in dieser Art darstellen. Es gibt also genau so viele Zerlegungen der Zahl m in eine Summe von n Zahlen $a_i \geq 0$, wie es Möglichkeiten gibt aus einer $m + n - 1$-elementigen Menge eine $n - 1$-elementige Teilmenge zu wählen, also ist die Anzahl

$$\binom{m+n-1}{n-1}.$$

1.4.9 Autokennzeichen

Ein deutsches Autokennzeichen besteht aus einer Kombination von ≤ 3 Buchstaben für den Landkreis oder die Stadt, ≤ 2 weiteren Buchstaben und bis zu einer vierstelligen Zahl, z.B.:



Es gibt 26^n Kombinationen aus n Buchstaben und somit

$$(26 + 26^2 + 26^3) \cdot (26 + 26^2) \cdot 9999 = 1.28 \cdot 10^{11}$$

mögliche Kennzeichen (wenn man von einer Assoziation mit dem Namen des Landkreises absieht).

1.5 Gleichungen und Ungleichungen

1.5.1 Gleichung

Eine Gleichung ist eine spezielle Aussage der Form

$$A = B\,,$$

wobei A und B arithmetische Ausdrücke sind, die von Variablen abhängen können. Durch geeignetes Ersetzen der Variablen durch konkrete Elemente einer Menge nimmt die Gleichung den Wahrheitswert 'wahr' oder 'falsch' an.

Die Menge der Elemente, die in die Gleichung eingesetzt werden dürfen, nennt man den Definitionsbereich D der Gleichung. Die Elemente des Definitionsbereichs, die den Wahrheitswert 'wahr' ergeben nennt man die Lösungen L der Gleichung.

Die Gleichung

$$x^2 = 2$$

mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ liefert zum Beispiel beim Einsetzen der Zahl $x = 1$ die Aussage

$$1^2 = 2\,.$$

Die Gleichung nimmt in diesem Fall also den Wahrheitswert 'falsch' an. Setzt man dagegen $x = -\sqrt{2}$ oder $x = \sqrt{2}$ ein, so nimmt die Gleichung den Wahrheitswert 'wahr' an. Die Werte $-\sqrt{2}$ und $\sqrt{2}$ sind also Lösungen der Gleichung.
Lässt man als Definitionsbereich nur positive reelle Zahlen zu, also $D = \{x \in \mathbb{R} \;:\; x > 0\}$, dann besitzt die Gleichung nur die Lösung $\sqrt{2}$. Besteht der Definitionsbereich lediglich aus den ganzen Zahlen, also $D = \mathbb{Z}$, dann besitzt die Gleichung keine Lösung. Die Lösungen einer Gleichung hängen also maßgeblich von ihrem Definitionsbereich ab.

1.5.2 Äquivalenzumformungen

Gleichungen die den selben Definitionsbereich und die selbe Menge von Lösungen besitzen nennt man äquivalent. Solche äquivalenten Gleichungen lassen sich durch so genannte Äquivalenzumformungen ineinander überführen. Bei Zahlengleichungen sind Äquivalenzumformungen z.B. das Addieren oder Subtrahieren desselben Terms auf beiden Seiten der Gleichung. Auch das Multiplizieren oder Dividieren beider Seiten einer Gleichung mit einem Term ($\neq 0$) liefert eine Äquivalenzumformung. Äquivalenzumformungen werden oft mit einem senkrechten Strich hinter der Gleichung notiert.

Betrachtet man zum Beispiel die Gleichung

$$x + 3 = 3x - 7$$

mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R}$, dann kann auf beiden Seiten x subtrahiert werden. Man schreibt dann

$$\begin{array}{rccll} & x+3 & = & 3x-7 & \mid -x \\ \iff & 3 & = & 2x-7 & . \end{array}$$

Im einem nächsten Schritt kann man auf beiden Seiten 7 addieren und danach die Gleichung auf beiden Seiten mit 1/2 multiplizieren, und man erhält

$$\begin{array}{rccll} & x+3 & = & 3x-7 & \mid -x \\ \Longleftrightarrow & 3 & = & 2x-7 & \mid +7 \\ \Longleftrightarrow & 10 & = & 2x & \mid \cdot 1/2 \\ \Longleftrightarrow & 5 & = & x & . \end{array}$$

Die Lösung der Gleichung ist also $x = 5$.

1.5.3 Bruchgleichung

Um Gleichungen zu lösen in denen Brüche vorkommen, versucht man durch geschicktes Umformen die Bruchterme wegzubekommen. Dazu faktorisiert man zuerst die Nenner um die Definitionsmenge um den Hauptnenner zu bestimmen. Dann multipliziert man die ganze Gleichung mit dem Hauptnenner und löst die dabei entstehende Gleichung. Dabei muss man beachten, dass so eine Multiplikation keine Äquivalenzumformung ist. Also muss man am Ende immer nachprüfen, ob die erhaltenen Lösungen wirklich zur Definitionsmenge der Ausgangsgleichung gehören.
Als Beispiel wird die Bruchgleichung

$$\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x-2} = \frac{4}{x^2-4}$$

betrachtet.
Mit einer der binomischen Formeln kann man den Nenner auf der rechten Seite in Linearfaktoren zerlegen:

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2).$$

Also besteht die Definitionsmenge aus allen reellen Zahlen außer -2 und 2. Nun multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit den Hauptnenner:

$$\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x-2} = \frac{4}{x^2-4} \quad \mid \cdot (x-2)(x+2)$$

$$\Longrightarrow 3(x-2) - 2(x+2) = 4 \Longrightarrow x = 14.$$

Wie man sieht, liegt das Ergebnis noch im Definitionsbereich und ist damit auch die Lösung der Ausgangsgleichung.

1.5.4 Wurzelgleichung

Das rechnerische Lösen von Gleichungen in denen Wurzeln vorkommen ist im Allgemeinen nicht möglich. In einfachen Fällen kann eine Wurzelgleichung aber durch geeignetes Potenzieren gelöst werden. Dabei muss zunächst die Wurzel auf einer Seite der Gleichung isoliert werden. Dann kann die Gleichung potenziert und gelöst werden. Bei den Lösungen die man so erhält ist aber Vorsicht geboten, da die potenzierte Gleichung in der Regel auch Lösungen besitzt die die ursprüngliche Gleichung nicht lösen. Das Potenzieren ist also keine Äquivalenzumformung. Es gilt aber, dass jede Lösung der ursprünglichen Gleichung auch die potenzierte Gleichung löst.

Beispielsweise sollen die Lösungen der Gleichung

$$\sqrt{4+x^2} - 1 = x$$

gesucht werden. Isolieren der Wurzel liefert

$$\sqrt{4+x^2} = x+1\,.$$

Durch Quadrieren erhält man

$$4+x^2 = (x+1)^2 = x^2+2x+1 \iff 2x = 3 \iff x = \frac{3}{2}\,.$$

Setzt man die Lösungen in die ursprüngliche Gleichung ein, erhält man

$$\sqrt{4+\left(\frac{3}{2}\right)^2} - 1 = \frac{3}{2} \iff \sqrt{\frac{25}{4}} - 1 = \frac{3}{2} \iff \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}\,.$$

Die Lösung der quadrierten Gleichung löst also auch die Wurzelgleichung.

Anders ist das bei der Gleichung

$$\sqrt{x^2} = -2\,.$$

Da die Wurzel einer Zahl immer positiv ist kann die Gleichung keine Lösung haben. Durch Quadrieren erhält man aber

$$x^2 = 4\,.$$

Die quadrierte Form hat also die Lösungen $x_{1,2} = \pm 2$. Beide Lösungen ergeben aber in die Wurzelgleichung eingesetzt einen Widerspruch.

1.5.5 Quadratische Gleichung

Eine quadratische Gleichung hat die Form

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0.$$

und wird mit der sogenannten Mitternachtsformel gelöst:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Der Term $D = b^2 - 4ac$ wird Diskriminante genannt. Am Vorzeichen der Diskriminante kann die Anzahl der reellen Lösungen einer quadratischen Gleichung erkannt werden. Man erhält für

- $D > 0$ zwei Lösungen,
- $D = 0$ eine Lösung,
- $D < 0$ keine Lösung.

Mit Hilfe der Lösungen lässt sich die Gleichung als Linearfaktorzerlegung schreiben:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

Beispiel:

Für die Gleichung

$$5x^2 - 5x - 30 = 0$$

erhält man mit der Mitternachtsformel

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 600}}{10} = \frac{5 \pm \sqrt{625}}{10} = \frac{5 \pm 25}{10} = \frac{1 \pm 5}{2}\,,$$

also die Lösungen

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = -2\,.$$

Die Linearfaktorzerlegung lautet

$$5(x-3)(x+2) = 0\,.$$

1.5.6 Polynomdivision

Zu Polynomen p und q mit $m = \operatorname{Grad} q \leq \operatorname{Grad} p = n$ gibt es eindeutig bestimmte Polynome f und r mit

$$p = fq + r, \quad \operatorname{Grad} f = n - m,\ \operatorname{Grad} r < m\,.$$

Diese Zerlegung kann durch Division mit Rest bestimmt werden.
Speziell folgt für eine Nullstelle t von p dass $p(x) = f(x)(x-t)$ mit $\operatorname{Grad} f = n - 1$.

Beweis:

Division von p durch q ergibt

$$\underbrace{a_n x^n + \cdots}_{p(x)} = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \underbrace{(b_m x^m + \cdots)}_{q(x)} + p_{n-1}(x)$$

mit einem Rest $p_{n-1}(x) = a'_{n-1} x^{n-1} + \cdots$.
Ist $m \leq n - 1$ kann erneut dividiert werden:

$$p_{n-1}(x) = \frac{a'_{n-1}}{b_m} x^{n-1-m} q(x) + p_{n-2}(x)\,.$$

Die Prozedur bricht ab, wenn der Grad des Restpolynoms kleiner als m ist, d.h. spätestens mit

$$r = p_{n-(n-m+1)}\,.$$

Durch sukzessives Einsetzen der Produkte folgt

$$f(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \frac{a'_{n-1}}{b_m} x^{n-1-m} + \cdots\,.$$

Ist t Nullstelle von p, so gilt

$$0 = p(t) = f(t)(t-t) + r(t) = r(t)$$

und somit $r(x) = 0$, da $\operatorname{Grad} r < 1$.

Beispiel:

Die Polynomdivision kann analog zur schriftlichen Division durchgeführt werden. Beispielsweise erhält man für $p(x) = 9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2$ und $q(x) = 3x^2 + 2x + 1$

$$
\begin{array}{l}
(\,9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2\,) : (3x^2 + 2x + 1) = 3x^3 + 2x^2 + x + \frac{r(x)}{q(x)} \\
\underline{-(\,9x^5 + 6x^4 + 3x^3\,)} \\
\qquad 6x^4 + 7x^3 + 4x^2 \\
\qquad \underline{-(\,6x^4 + 4x^3 + 2x^2\,)} \\
\qquad\qquad 3x^3 + 2x^2 + 4x \\
\qquad\qquad \underline{-(\,3x^3 + 2x^2 + x\,)} \\
\qquad\qquad\qquad 3x + 2 = r(x)
\end{array}
$$

Es ist also

$$\underbrace{9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2}_{p(x)} = \underbrace{(3x^3 + 2x^2 + x)}_{f(x)}\underbrace{(3x^2 + 2x + 1)}_{q(x)} + \underbrace{(3x + 2)}_{r(x)}\;.$$

1.5.7 Gleichungen höherer Ordnung

Gleichungen höherer Ordnung haben die Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0 = 0, \quad \text{wobei } a_n \neq 0,\; n \geq 3.$$

Es gibt ein einfaches Kriterium zum Auffinden ganzzahliger Lösungen. Sind alle Koeffizienten in der Gleichung ganze Zahlen, so ist jede ganzzahlige Lösung ein Teiler von a_0. So kann man oft relativ schnell die erste Lösung finden.

Kennt man bereits eine Lösung, so kann man mit Hilfe der Polynomdivision eine Gleichung niedrigeren Grades gewinnen, die man dann durch eine geeignete Methode zu lösen versucht.

Beispiel:

Für die Gleichung

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$$

kommen als ganzzahlige Lösungen

$$x = \pm 1,\; \pm 3$$

in Frage.
Für $x = -1$ hat die Gleichung die Form

$$-1 + 1 + 3 - 3 = 0\,,$$

somit ist mit

$$x_1 = -1$$

eine erste Lösung gefunden.
Eine Polynomdivision ergibt

$$(x^3 + x^2 - 3x - 3) : (x + 1) = x^2 - 3$$

und aus $x^2 - 3 = 0$ folgen $x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$ als weitere Lösungen.

1.5.8 Reelle Ungleichungen

Eine Ungleichung ist eine Aussage der Form

$$A \square B,$$

wobei $\square$ für eine der Relationen $<$, $>$, $\leq$ oder $\geq$ steht. A und B sind dabei reelle Ausdrücke, die von Variablen abhängen können.

Wie bei Gleichungen sind auch für Ungleichungen die Begriffe Definitionsbereich und Lösungen definiert. Genauso spricht man von äquivalenten Ungleichungen, wenn verschiedene Ungleichungen den selben Definitionsbereich und die selben Lösungen besitzen.

Auch bei Ungleichungen sind die Addition oder Subtraktion desselben Terms auf beiden Seiten Äquivalenzumformungen. Das gilt auch für das Multiplizieren oder Dividieren beider Seiten mit dem selben Term > 0. Wegen

$$a > b \iff a \cdot c < b \cdot c \quad \text{für } c < 0$$

muss aber beim Multiplizieren bzw. Dividieren mit negativen Termen die Anordnung geändert werden.

1.5.9 Beispiele Reeller Ungleichungen

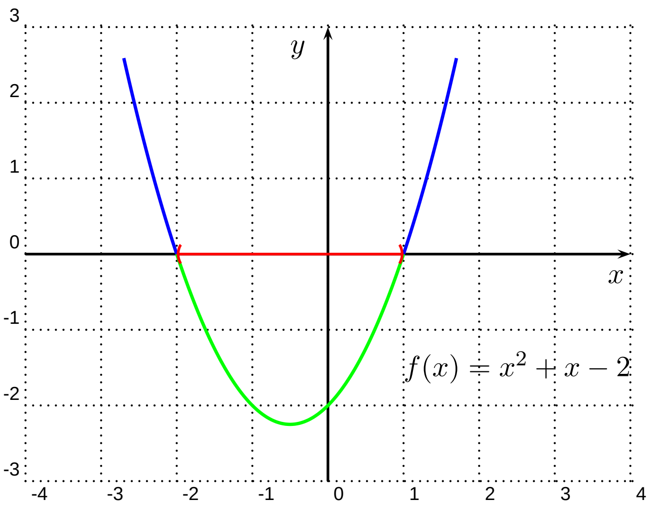
Die Ungleichung

$$-x^2 > x - 2\ ,\ D = \mathbb{R}$$

kann z.B. folgendermaßen umgeformt werden:

$$\begin{array}{rrcll} & -x^2 & > & x-2 & \mid -(x-2) \\ \Leftrightarrow & -x^2 - x + 2 & > & 0 & \mid \cdot (-1) \\ \Leftrightarrow & x^2 + x - 2 & < & 0 & \\ \Leftrightarrow & (x-1)(x+2) & < & 0 & \end{array}$$

Graphisch kann man die Lösungsmenge als die x-Werte bestimmen, für die das Schaubild der Funktion $f(x) = x^2 + x - 2$ echt unter x-Achse verläuft. Im folgenden Bild ist dieser Bereich grün gekennzeichnet, die Lösungsmenge ist das rot eingezeichnete Intervall $(-2, 1)$ der x-Achse (die Grenzen $x = -2$ und $x = 1$ sind keine Elemente der Lösungsmenge).



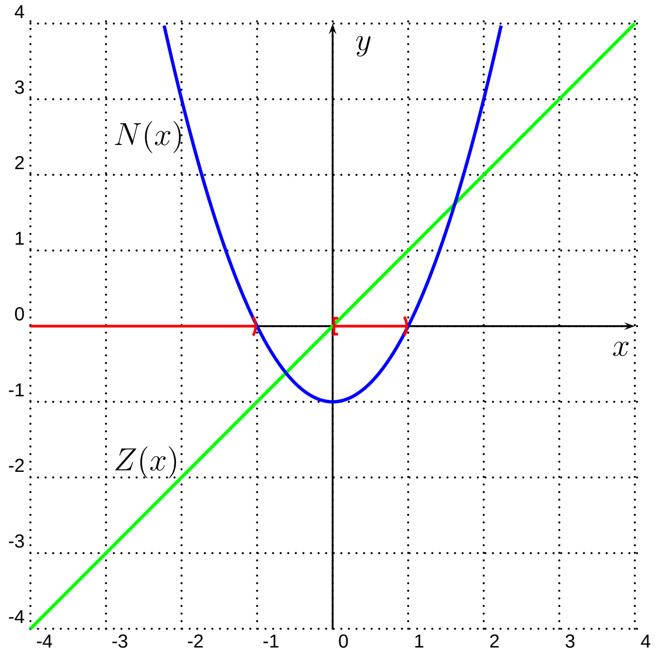
Zur rechnerischen Lösung bestimmt man zunächst die Nullstellen der linken Seite. Diese können aus der letzten der obigen Ungleichungen direkt als $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$ abgelesen werden. Durch Einsetzten von $x = 0$ in die Ungleichung erkennt man, dass $x = 0$ Element der Lösungsmenge ist. Es gilt also $x^2 + x - 2 \leq 0$ für $-2 \leq x \leq 1$ und damit ist $L = \{x \in \mathbb{R} \ : \ -2 < x < 1\}$ die Lösungsmenge der Ungleichung.

Beispiel:

a) Die Lösungen der Ungleichung

$$\frac{x}{x^2-1} \leq 0 \ ; \ x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$$

sind die x-Werte für die der Zähler 0 ist, oder aber für den Zähler und Nenner verschiedenes Vorzeichen haben. Für die graphische Lösung zeichnet man z.B. die Zählerfunktion $Z(x) = x$ und die Nennerfunktion $N(x) = x^2 - 1$ separat ein.



Die roten Bereiche zeigen die Lösungsmenge $L = (-\infty, -1) \cup [0, 1)$ der Ungleichnung.

Rechnerisch ergibt sich: Wegen $x \neq \pm 1$ kann man beide Seiten der Ungleichung mit $x^2 - 1$ multiplizieren. Es müssen dann zwei Fälle unterschieden werden:

Fall 1: Ist $x^2 - 1 > 0$, dann gilt $x^2 > 1$ also $x > 1$ oder $x < -1$. Die Ungleichung wird zu

$$\begin{array}{rrcl} & \frac{x}{x^2-1} & \leq & 0 \quad | \cdot (x^2-1) \\ \Leftrightarrow & x & \leq & 0 \end{array}$$

Mit den Bedingungen aus $x^2 - 1 > 0$ folgt dann, dass alle $x < -1$ die Ungleichung erfüllen.

Fall 2: Ist $x^2 - 1 < 0$, dann gilt $x^2 < 1$ also $-1 < x < 1$. Die Ungleichung wird dann zu

$$\begin{array}{rrcl} & \dfrac{x}{x^2-1} & \leq & 0 \quad | \cdot (x^2-1) \\ \Leftrightarrow & x & \geq & 0 \end{array}$$

Mit der Bedingungen $-1 < x < 1$ folgt dann, dass alle $x \in [0, -1)$ die Ungleichung erfüllen. Insgesamt ergibt sich also auch rechnerisch $L = (-\infty, -1) \cup [0, 1)$.

b) Ein einfaches Beispiel für eine Ungleichung die keine Lösung besitzt ist

$$x^2 + 1 \leq 0 \; ; \; x \in \mathbb{R}$$

Bei der linken Seite der Ungleichung handelt es sich um eine Normalparabel, die um 1 nach oben verschoben ist. Das Schaubild von $f(x) = x^2 + 1$ verläuft strikt oberhalb der x-Achse. Die Lösungsmenge ist also die leere Menge, d.h $L = \emptyset$.

1.5.10 Beispiele von Betragsungleichungen

Beim Lösen von Betrags(un)gleichungen sind in der Regel Fallunterscheidungen notwendig. Dabei müssen die Fälle, dass das Argument größer oder gleich Null, bzw. kleiner Null ist separat betrachtet werden. Die Betragsungleichung

$$-|x| \leq x - 2 \; ; \; x \in \mathbb{R}$$

kann rechnerisch folgendermaßen gelöst werden:

Fall 1: Ist $x \geq 0$ dann lautet die Ungleichung

$$\begin{array}{rrcl} & -|x| & \leq & x-2 \\ \Longleftrightarrow & -x & \leq & x-2 \\ \Longleftrightarrow & -2x & \leq & -2 \\ \Longleftrightarrow & x & \geq & 1\,, \end{array}$$

d.h. im ersten Fall ($x \geq 0$) ergibt sich also $L_1 = \{x \in \mathbb{R} \; : \; x \geq 1\}$ als Lösungsmenge.

Fall 2: Ist $x < 0$ dann lautet die Ungleichung

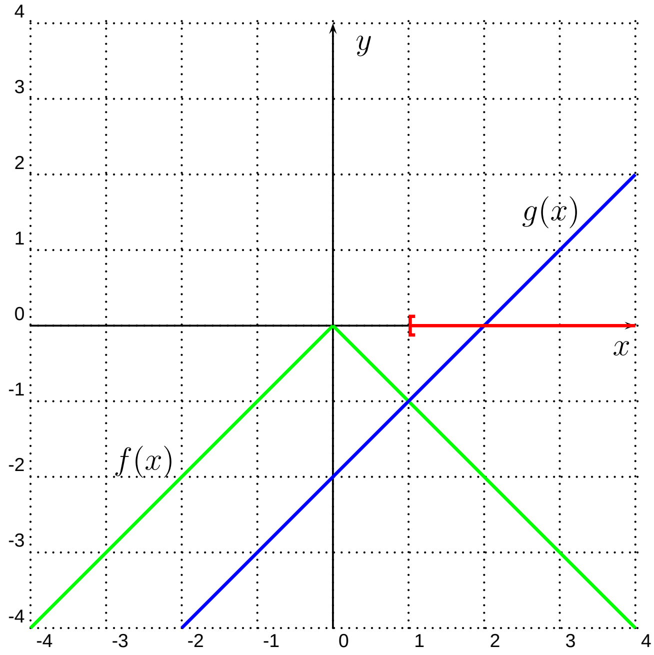
$$\begin{array}{rrcl} & -|x| & \leq & x-2 \\ \Longleftrightarrow & -(-x) & \leq & x-2 \\ \Longleftrightarrow & x & \leq & x-2 \\ \Longleftrightarrow & 0 & \leq & -2\,. \end{array}$$

Die letzte Ungleichung ist immer falsch. Im zweiten Fall ($x < 0$) gibt es also keine Lösung, d.h. $L_2 = \emptyset$.

Insgesamt erhält man also als Lösungsmenge für die Ungleichung

$$L = \mathcal{L}_1 = \{x \in \mathbb{R} \; : \; x \geq 1\} = [1, \infty)\,.$$

Diese Lösung kann auch graphisch bestimmt werden. Setzt man die linke Seite $f(x) = -|x|$ und die rechte Seite $g(x) = x - 2$, dann erhält man die Schaubilder



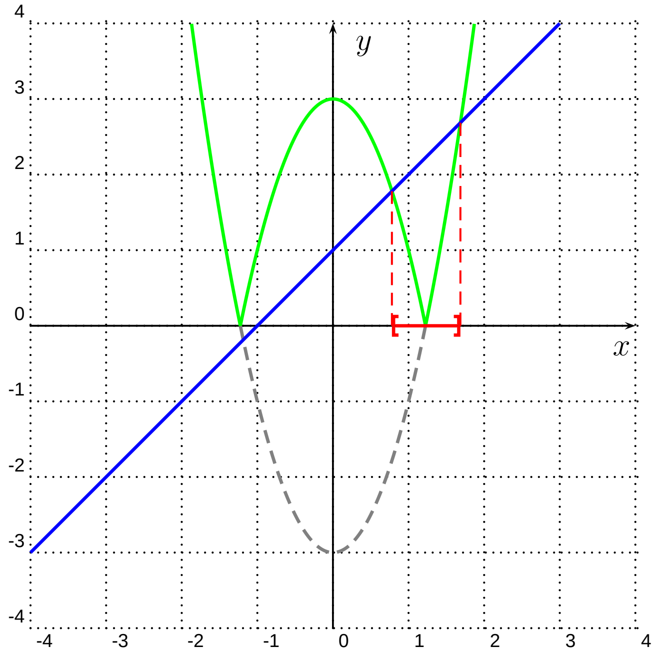
Das rot eingezeichnete Intervall $[1, \infty)$ ist der Bereich in dem die (grüne) linke Seite $f(x) = -|x|$ kleiner oder gleich der (blauen) rechten Seite $g(x) = x - 2$ ist. Das rote Intervall $[1, \infty)$ beschreibt also die Lösung der Ungleichung $f(x) \leq g(x)$.

Beispiel:

Die Betragsungleichung

$$|2x^2 - 3| \leq x + 1\,.$$

wird zunächst graphisch gelöst.



Die grau gestrichelte Kurve zeigt den Bereich von $2x^2 - 3$, der unterhalb der x-Achse verläuft. Durch das bilden des Betrags wird dieser negative Teil nach oben gespiegelt. Die grüne Kurve zeigt also die linke Seite $|2x^2 - 3|$ der Ungleichung. Die blaue Kurve zeigt das Schaubild der rechten Seite $x + 1$. Lösungen der Ungleichung sind alle x-Werte in denen die grüne Kurve unterhalb der blauen verläuft, sowie die x-Werte für die sich die Schaubilder schneiden. Das Lösungsintervall ist rot eingezeichnet.

Für die rechnerische Lösung unterscheidet man zwei Fälle.

Fall 1: $2x^2 - 3 \geq 0$. Dann folgt

$$\begin{array}{rcc} & |2x^2-3| & \leq & x+1 \\ \Longleftrightarrow & 2x^2-3 & \leq & x+1 \\ \Longleftrightarrow & 2x^2-x-4 & \leq & 0 \end{array}$$

Die Nullstellen der linken Seite, d.h. die x-Werte für die $2x^2 - 3 = x + 1$ ist, sind

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{33}}{4} \approx -1.19 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{33}}{4} \approx 1.69\,.$$

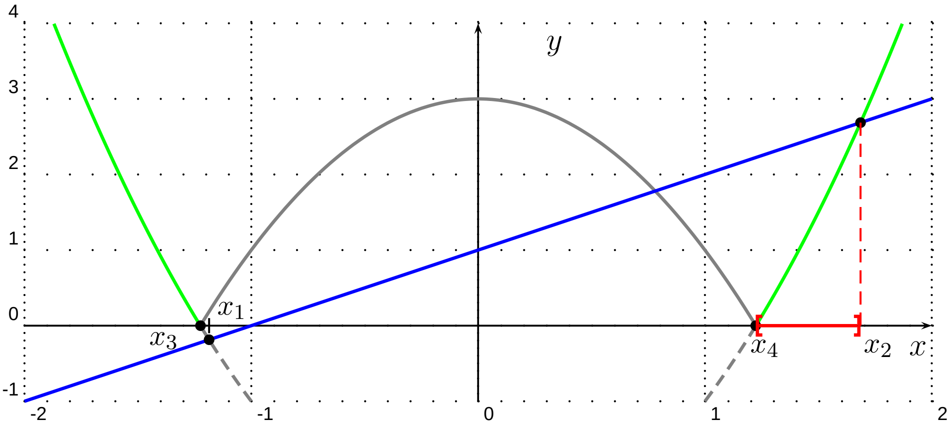
Die Lösungen der Ungleichung im Fall 1 sind also die x-Werte mit $x_1 \leq x \leq x_2$ für die gleichzeitig noch $2x^2 - 3 \geq 0$ gilt. Die Nullstellen von $2x^2 - 3$ sind

$$x_3 = -\sqrt{3/2} \approx -1.22 \quad \text{und} \quad x_4 = \sqrt{3/2} \approx 1.22\,.$$

Damit ist $2x^2 - 3 \geq 0$ wenn $x \leq x_3$ oder $x \geq x_4$ gilt. Wegen

$$x_3 < x_1 < x_4 < x_2$$

ist das Intervall $L_1 = [x_4, x_2]$ die Lösungsmenge im Fall 1.



Fall 2: $2x^2 - 3 < 0$. Dann folgt

$$\begin{array}{rcc} & |2x^2-3| & \leq & x+1 \\ \Longleftrightarrow & -(2x^2-3) & \leq & x+1 \\ \Longleftrightarrow & -2x^2-x+2 & \leq & 0 \end{array}$$

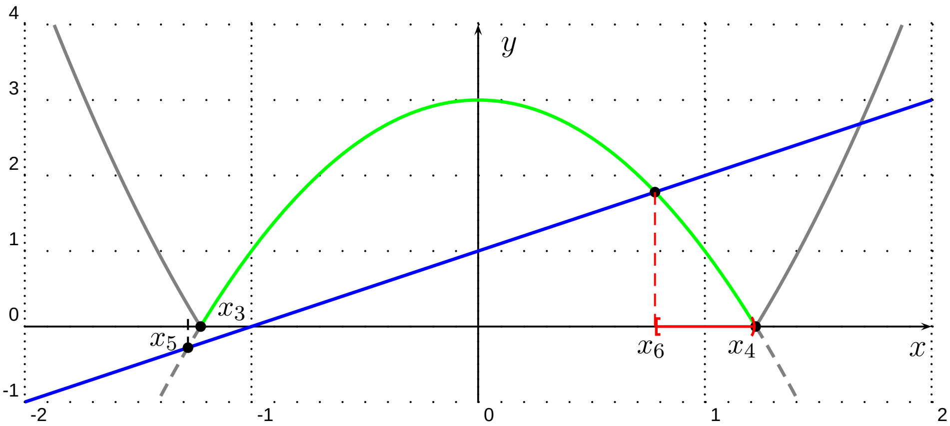
Die Nullstellen der linken Seite sind

$$x_5 = \frac{-1-\sqrt{17}}{4} \approx -1.28 \quad \text{und} \quad x_6 = \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \approx 0.78\,.$$

Die Lösungen im zweiten Fall sind also die x-Werte mit $x \leq x_5$ oder $x \geq x_6$ für die gleichzeitig $2x^2 - 3 < 0$, d.h. $-2x^2 + 3 > 0$ gilt. Dies ist für

$$x_3 = -\sqrt{3/2} \;<\; x \;<\; \sqrt{3/2} = x_4$$

der Fall. Die Lösungsmenge im zweiten Fall ist also durch das Intervall $L_2 = [x_6, x_4)$ beschrieben.



Insgesamt ergibt sich als Lösungsmenge für die Ungleichung

$$L = L_1 \cup L_2 = [x_4, x_2] \cup [x_6, x_4) = [x_6, x_2] = \left[\frac{-1+\sqrt{17}}{4}, \frac{1+\sqrt{33}}{4}\right] .$$

1.5.11 Lineare Ungleichung in zwei Variablen

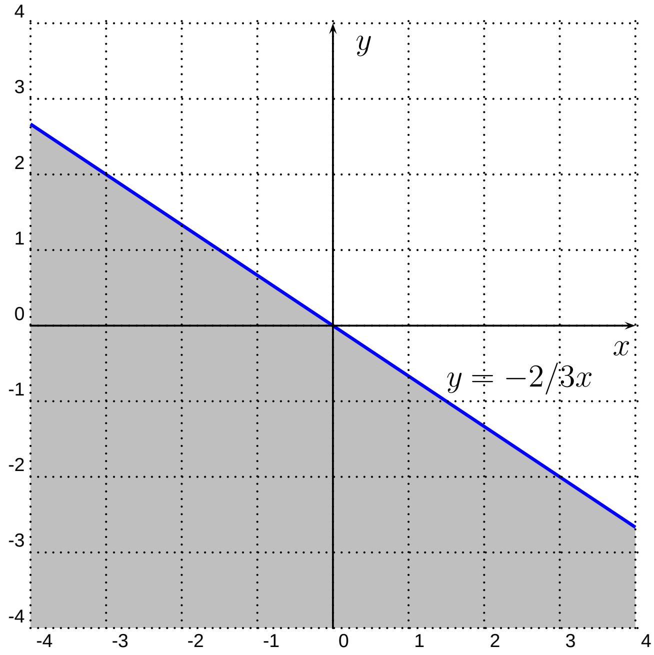
Es wird die Ungleichung

$$2x + 3y \leq 0$$

in den beiden Variablen $x, y \in \mathbb{R}$ betrachtet. Die Lösungsmenge kann als Teilmenge der x-y-Ebene angesehen werden. Löst man die Ungleichung nach der Variablen y auf, dann erhält man

$$y \leq -2/3x\,.$$

Die Lösungen der Ungleichung sind also alle Punkte (x, y) der x-y-Ebene die auf oder unterhalb der Geraden $f(x) = -2/3x$ liegen. In der folgenden Abbildung ist die Lösungsmenge grau eingezeichnet.

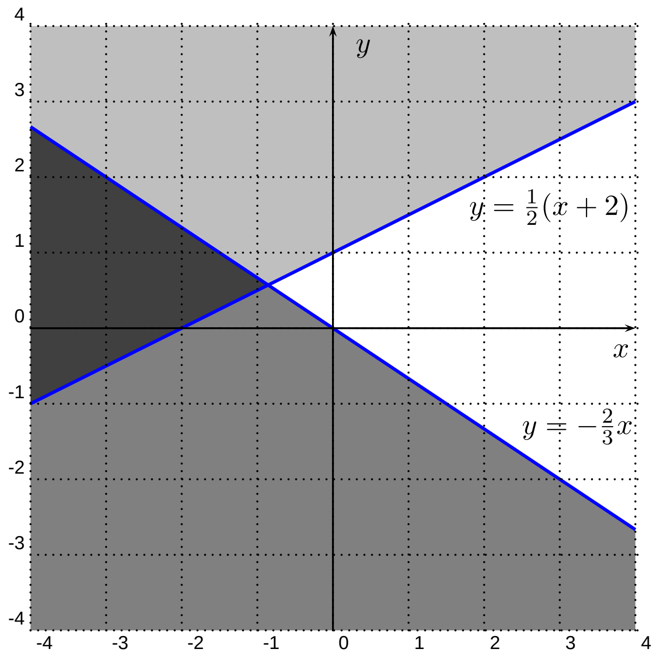


1.5.12 Lineares Ungleichungssystem in zwei Variablen

Die Lösungsmenge eines Systems von Ungleichungen wie z.B.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y & \leq & 0 \\ -x+2y & \geq & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y & \leq & -\frac{2}{3}x \\ y & \geq & \frac{1}{2}(x+2) \end{array}\right.$$

erhält man, indem man die Lösungsmengen der einzelnen Ungleichungen schneidet. In der Abbildung ist die Lösung des Systems durch das dunkle Gebiet gekennzeichnet:

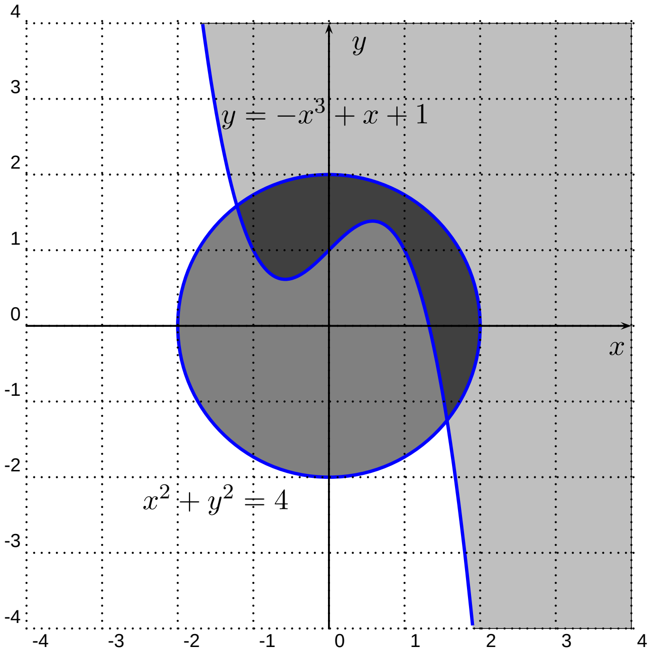


1.5.13 Nichtlineares Ungleichungssystem in zwei Variablen

Das folgenden Ungleichnungssystem ist ein Beispiel für ein nichtlineares System:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2 & \leq & 4 \\ x^3-x+y & \geq & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2 & \leq & 4 \\ y & \geq & -x^3+x+1 \end{array}\right.$$

Die erste Zeile beschreibt Rand und Inneres eines Kreises mit Radius 2 um den Ursprung. Die zweite Zeile beschreibt den Bereich über einer kubischen Parabel. Graphisch ermittelt man als Lösung das folgende (dunkel eingefärbte) Gebiet.



Eine rechnerische Lösung ist hier nicht mehr ohne Weiteres möglich.

1.6 Komplexe Zahlen

1.6.1 Komplexe Zahlen

Um auch Wurzeln aus negativen Zahlen bilden zu können, führt man eine imaginäre Einheit i als eine der Lösungen von

$$\mathrm{i}^2 = -1$$

ein und bezeichnet

$$\mathbb{C} = \{z = x + \mathrm{i}y, \quad x, y \in \mathbb{R}\},$$

als Menge der komplexen Zahlen. Dabei werden x und y Real- bzw. Imaginärteil genannt:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z,$$

insbesondere ist $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Im}(z) = 0\}$.
Die komplexen Zahlen bilden einen Körper. Definiert man Addition und Multiplikation gemäß

$$\begin{array}{rcl} z_1 + z_2 & = & x_1 + x_2 + \mathrm{i}(y_1 + y_2) \\ z_1 \cdot z_2 & = & x_1x_2 - y_1y_2 + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1), \end{array}$$

so gelten die üblichen Rechenregeln.

1.6.2 Komplexe Konjugation

Für eine komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ definiert man die konjugiert komplexe Zahl

$$\bar{z} = x - \mathrm{i}y\,.$$

Geometrisch bedeutet die komplexe Konjugation eine Spiegelung an der x-Achse: $(x, y) \to (x, -y)$.
Die komplexe Konjugation ist mit den arithmetischen Operationen verträglich:

$$\overline{z_1 \circ z_2} = \bar{z}_1 \circ \bar{z}_2$$

für $\circ = +, -, *, /$.

1.6.3 Betrag komplexer Zahlen

Der Betrag einer komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ ist als

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

definiert. Für $z \in \mathbb{R}$ ist diese Definition konsistent mit der Definition der Betragsfunktion für reelle Zahlen und besitzt analoge Eigenschaften.

- Positivität:
$$|z| \geq 0, \quad |z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$$
- Multiplikativität:
$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|, \quad |z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|,\ z_2 \neq 0$$
- Dreiecksungleichung:
$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Beweis:

Die Positivität der Betragsfunktion ist offensichtlich und die Multiplikativität läßt sich mit Hilfe der Definition leicht nachrechnen.
Zum Beweis der Dreiecksungleichung quadriert man die Ungleichungskette und erhält nach Subtraktion von $|z_1|^2 + |z_2|^2$

$$-2|z_1||z_2| \leq z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 \leq 2|z_1||z_2|\,.$$

Diese Ungleichungen sind äquivalent zu

$$\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \leq |z_1||z_2|$$

bzw. zu

$$x_1x_2 + y_1y_2 \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}\,.$$

Erneutes Quadrieren führt schließlich auf die Ungleichung

$$2x_1x_2y_1y_2 \leq x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2\,,$$

welche aufgrund der Nichtnegativität von $(x_1y_2 - x_2y_1)^2$ richtig ist.

1.6.4 Formel von Euler-Moivre

Die Exponentialfunktion mit imaginärem Argument lässt sich mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen ausdrücken:

$$\cos t + \mathrm{i} \sin t = \exp(\mathrm{i}t)$$

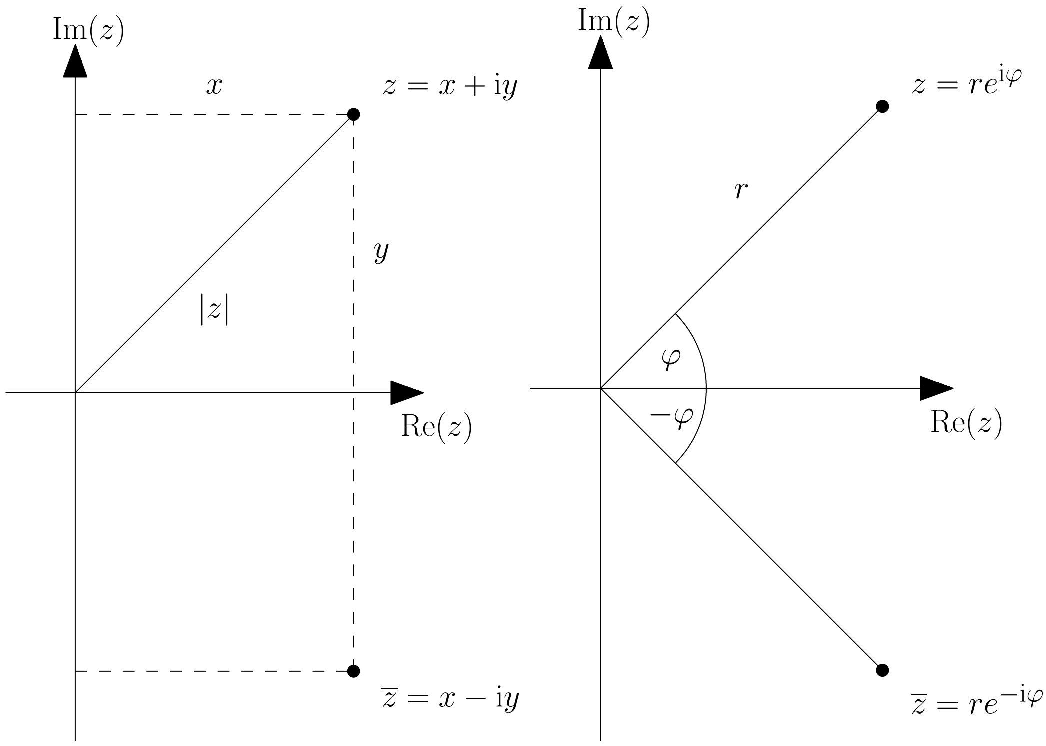
für $t \in \mathbb{R}$. Der Kosinus und der Sinus entsprechen also dem Real- und Imaginärteil komplexer Zahlen mit Betrag 1 ($|\exp(\mathrm{i}t)| = 1$).
Invertiert man die obige Formel, so folgt

$$\begin{aligned} \cos t &= \mathrm{Re}\, e^{\mathrm{i}t} = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}t} + e^{-\mathrm{i}t}\right) \\ \sin t &= \mathrm{Im}\, e^{\mathrm{i}t} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}t} - e^{-\mathrm{i}t}\right) . \end{aligned}$$

Die Identitäten zwischen exp, cos und sin gehen auf Euler and Moivre zurück. Sie bilden die Grundlage für die geometrische Interpretation komplexer Zahlen und spielen in der Fourier-Analysis eine wichtige Rolle.

1.6.5 Gaußsche Zahlenebene

Komplexe Zahlen $z = x + \mathrm{i}y$ lassen sich mit den Punkten der Ebene identifizieren. Der Betrag entspricht dem Abstand vom Ursprung, Real- und Imaginärteil sind die Projektionen auf die reelle bzw. imaginäre Achse, und die konjugiert komplexe Zahl ergibt sich durch Spiegelung an der reellen Achse.



In Polarkoordinaten erhält man aus der Formel von Euler-Moivre die Darstellung

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = r\exp(\mathrm{i}\varphi)$$

mit $r = |z|$. Der Winkel φ ist nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt und wird als Argument von z bezeichnet:

$$\varphi = \arg(z) .$$

Als Standardbereich (Hauptwert) wird das Intervall $(-\pi, \pi]$ vereinbart.
Es gilt

$$\tan\varphi = \frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\,,$$

Das Argument $\arg(z)$ kann also mit Hilfe der Arcustangens-Funktion aus dem Quotienten y/x bestimmt werden. Dabei ist der richtige Zweig zu wählen, d. h., falls $\mathrm{Re}(z) < 0$ muß π oder $-\pi$ zum Wert der Umkehrfunktion addiert werden.
Die Polardarstellung einiger komplexer Zahlen ist in der folgenden Tabelle angegeben.

z	1	-1	$\pm\mathrm{i}$	$1\pm\mathrm{i}$	$\sqrt{3}\pm\mathrm{i}$	$1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}$
r	1	1	1	$\sqrt{2}$	2	2
φ	0	π	$\pm\pi/2$	$\pm\pi/4$	$\pm\pi/6$	$\pm\pi/3$

Beispiel:

Um $z = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$ in Polarform umzuwandeln bildet man

$$|z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2, \quad \arctan(\sqrt{3}) = \pi/3\,.$$

Da $\mathrm{Re}\, z \geq 0$, stimmt dieser Winkel mit $\arg z$ überein, und man erhält

$$\begin{aligned} z &= 2\,\exp(\mathrm{i}\pi/3) \\ &= 2\,(\cos(\pi/3) + \mathrm{i}\sin(\pi/3)) \\ &= 2\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\,. \end{aligned}$$

Für $z = -1 + \mathrm{i}$ ist

$$|z| = \sqrt{2}, \quad \arctan(-1) = -\pi/4\,.$$

Da in diesem Fall $\mathrm{Re}\, z < 0$ ist, unterscheidet sich das Argument von z um $\pm\pi$. Der Hauptwert ist

$$\arg z = -\pi/4 + \pi = 3\pi/4$$

und es folgt

$$z = \sqrt{2}\exp(\mathrm{i}(3\pi/4))\,.$$

Aus der Formel von Euler-Moivre erhält man

$$\begin{aligned} 2\exp(\mathrm{i}\pi/6) &= 2(\cos(\pi/6) + \mathrm{i}\sin(\pi/6)) \\ &= \sqrt{3} + \mathrm{i}\,. \end{aligned}$$

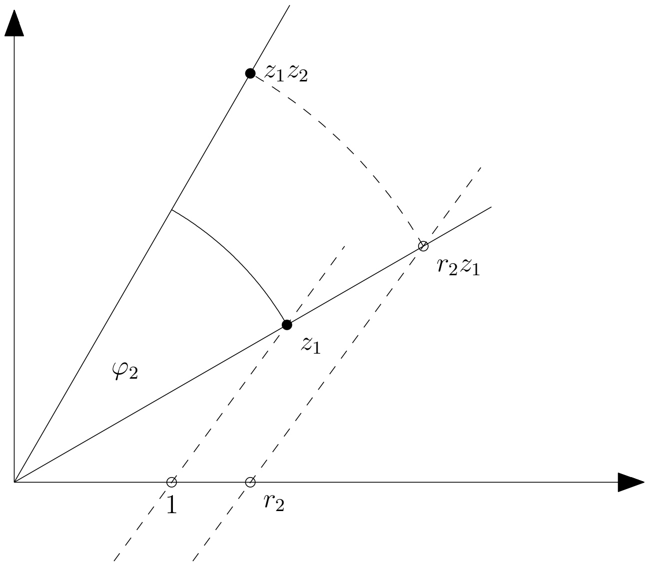
1.6.6 Multiplikation komplexer Zahlen

Das Produkt $z_1 z_2$ zweier komplexer Zahlen

$$z_k = x_k + \mathrm{i}y_k = r_k\exp(\mathrm{i}\varphi_k)$$

ist

$$(x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\mathrm{i} = r_1r_2\exp(\mathrm{i}(\varphi_1 + \varphi_2))\,.$$



Geometrisch entspricht die Multiplikation mit einer komplexen Zahl $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$ einer Streckung um den Faktor r und einer Drehung um den Winkel φ.

Beispiel:

Das Produkt von $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\exp(\mathrm{i}\pi/4)$ und $\sqrt{3} + 3\mathrm{i} = 2\sqrt{3}\exp(\mathrm{i}\pi/3)$ erhält man durch Ausmultiplizieren der Standardform als

$$(1 + \mathrm{i})(\sqrt{3} + 3\mathrm{i}) = \sqrt{3} - 3 + \left(\sqrt{3} + 3\right)\mathrm{i}$$

und in der Polarform als

$$\sqrt{2}\exp(\mathrm{i}\pi/4) \cdot 2\sqrt{3}\exp(\mathrm{i}\pi/3) = 2\sqrt{6}\exp(7\mathrm{i}\pi/12)\,.$$

Für

$$z = 3 + \sqrt{3}\mathrm{i} = 2\sqrt{3}\exp(\mathrm{i}\pi/6)$$

ist

$$z^2 = 6 + 6\sqrt{3}\mathrm{i} = 12\exp(\mathrm{i}\pi/3)\,.$$

Wie die Beispiele zeigen, ist die Multiplikation in Polarform im allgemeinen einfacher. Dies trifft insbesondere für die Bildung von Potenzen zu.

1.6.7 Division komplexer Zahlen

Der Quotient z_1/z_2 zweier komplexer Zahlen

$$z_k = x_k + \mathrm{i}y_k = r_k \exp(\mathrm{i}\varphi_k)$$

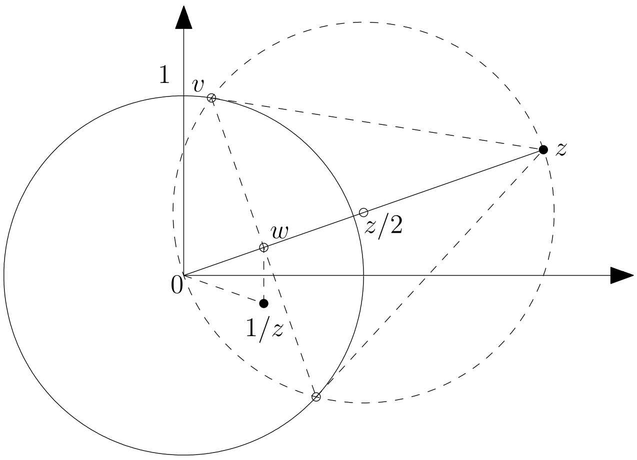
ist

$$\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\,\mathrm{i} = \frac{r_1}{r_2}\exp(\mathrm{i}(\varphi_1 - \varphi_2))\,.$$

Speziell ist

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r^2}\bar{z} = \frac{1}{r}\exp(-\mathrm{i}\varphi) = \frac{x}{r^2} - \frac{y}{r^2}\,\mathrm{i}\,.$$

Der Kehrwert einer komplexen Zahl läßt sich durch Spiegelung am Einheitskreis C konstruieren, wie in der Abbildung veranschaulicht ist.



Die komplex konjugierte Zahl $w = \bar{z}$ ist der Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks aus den Tangenten an C durch den Punkt z und den rechtwinklig schneidenden Radii. Die Zahl z erhält man dann durch Spiegelung an der reellen Achse.

Beweis:

Mit $z_k = x_k + \mathrm{i}y_k = r_k \exp(i\varphi_k)$ gilt für den Quotient zweier komplexer Zahlen:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \frac{(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2)}{(x_2 + \mathrm{i}y_2)(x_2 - \mathrm{i}y_2)} \\ &= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + (x_2y_1 - x_1y_2)\mathrm{i}}{x_2^2 + y_2^2}\end{aligned}$$

bzw.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \exp(\mathrm{i}\varphi_1)}{r_2 \exp(\mathrm{i}\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \exp(\mathrm{i}\varphi_1 - \mathrm{i}\varphi_2)\,.$$

Insbesondere erhält man

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{x + \mathrm{i}y} = \frac{x - \mathrm{i}y}{(x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y)} \\ &= \frac{\bar{z}}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{r^2} = \frac{1}{r}\ \exp(-\mathrm{i}\varphi)\,.\end{aligned}$$

Die geometrische Konstruktion basiert auf dem Theorem von Pythagoras. Daraus folgt

$$|w|\,|z| = 1^2\,,$$

d.h. w hat den korrekten Betrag. Spiegelung an der reellen Achse ändert dann das Vorzeichen des Arguments, so dass

$$\arg \bar{w} = \arg(1/z)$$

wie behauptet.

Beispiel:

Um

$$\frac{(1+\sqrt{3}\mathrm{i})+2\exp(-\mathrm{i}\pi/6)}{\exp(\mathrm{i}\pi/2)(1-\mathrm{i})}$$

zu berechnen, bildet man die Summe im Zähler mit der Standardform,

$$(1+\sqrt{3}\mathrm{i})+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=(1+\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)\mathrm{i}\,,$$

und das Produkt im Nenner mit der Polarform,

$$\exp(\mathrm{i}\pi/2)\cdot\sqrt{2}\exp(-\mathrm{i}\pi/4)=\sqrt{2}\exp(\mathrm{i}\pi/4)=1+\mathrm{i}\,.$$

Damit ist der Quotient

$$\frac{((1+\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{2\sqrt{3}-2\mathrm{i}}{2}=2\exp(-\mathrm{i}\pi/6)\,,$$

und die Umwandlung in Standardform ergibt

$$2(\cos(\pi/6)-\mathrm{i}\sin(\pi/6))=\sqrt{3}-\mathrm{i}\,.$$

Beispiel:

Für die Analyse linearer Wechselstromnetzwerke ist die komplexe Schreibweise vorteilhaft. Schreibt man für die Spannung und Stromstärke

$$U(t)=U_0e^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi)}\,,\quad I(t)=I_0e^{\mathrm{i}(\omega t+\psi)}\,,$$

so ist der komplexe Widerstand

$$Z=U(t)/I(t)$$

zeitunabhängig. Für die Grundelemente

Widerstand R Spule L Kondensator C

$Z=R$ $Z=\mathrm{i}\omega L$ $Z=(\mathrm{i}\omega C)^{-1}$

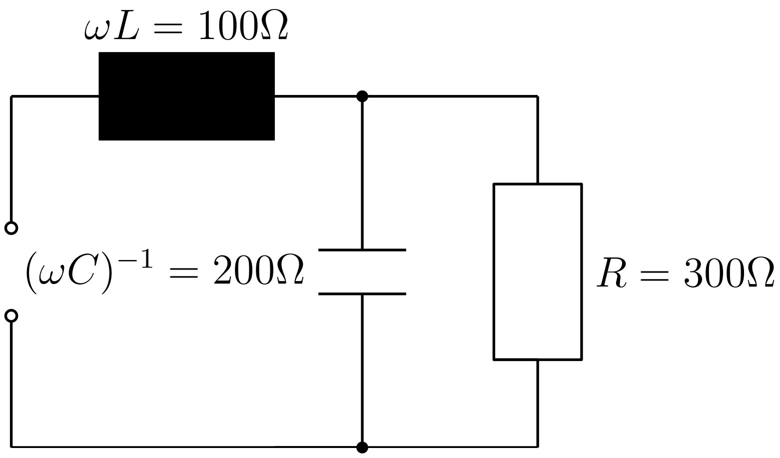
addieren sich die komplexen Widerstände bei Serienschaltung:

$$Z_{\text{gesamt}}=Z_1+Z_2$$

und ihre Kehrwerte bei Parallelschaltung:

$$\frac{1}{Z_{\text{gesamt}}}=\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}\quad\Rightarrow\quad Z_{\text{gesamt}}=\frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}\,.$$

Man bezeichnet $\operatorname{Re}Z$ als Wirkwiderstand, $\operatorname{Im}Z$ als Blindwiderstand und $|Z|$ als Scheinwiderstand oder Impedanz.
Beispielsweise beträgt für den Schaltkreis



der Gesamtwiderstand

$$Z_{\text{gesamt}} = \mathrm{i}\omega L + \frac{R(\mathrm{i}\omega C)^{-1}}{R + (\mathrm{i}\omega C)^{-1}} = 100\mathrm{i}\Omega + \frac{300\Omega(-200\mathrm{i}\Omega)}{300\Omega - 200\mathrm{i}\Omega} \approx (92.31 - 38.46\mathrm{i})\Omega\,.$$

Bei einer Wechselspannung von $U_{\text{effektiv}} = 220\text{V}$ fließt dabei ein Effektivstrom von

$$I_{\text{effektiv}} = \frac{U_{\text{effektiv}}}{|Z|} = \frac{220\text{V}}{100\Omega} = 2.2\text{A}\,.$$

1.6.8 Einheitswurzeln

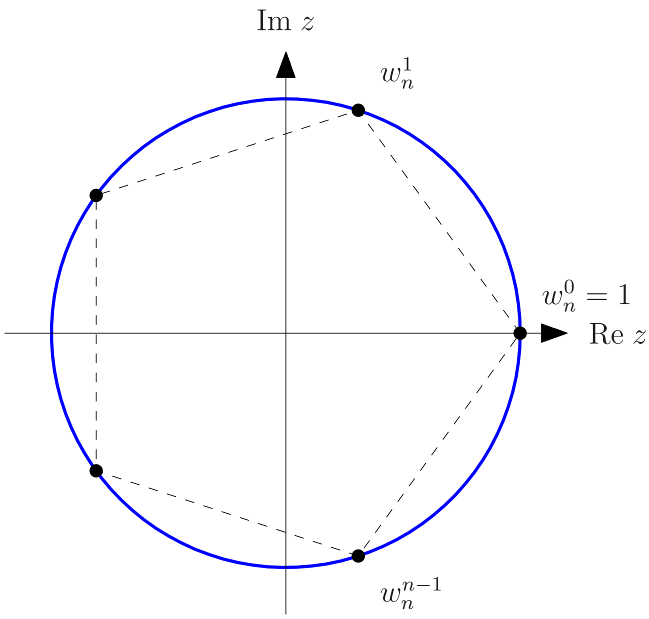
Die Gleichung

$$z^n = 1$$

hat in $\mathbb{C}$ genau n Lösungen

$$z_k = w_n^k, \quad w_n = \exp(2\pi\mathrm{i}/n), \quad k = 0, \ldots, n-1\,,$$

die als Einheitswurzeln bezeichnet werden.



Wie in der Abbildung veranschaulicht ist, bilden die Einheitswurzeln ein dem Einheitskreis einbeschriebenes regelmäßiges n-Eck.

Beispiel:

Für die Berechnung der kubischen Einheitswurzel erhält man aus der allgemeinen Formel

$$z_k = \exp\frac{2\pi \mathrm{i} k}{3} \qquad k = 0, 1, 2\,,$$

d.h.

$$\begin{aligned} z_0 &= \exp 0 = 1 \\ z_1 &= \exp\frac{2\pi\mathrm{i}}{3} = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_2 &= \exp\frac{4\pi\mathrm{i}}{3} = \cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\,. \end{aligned}$$

Die Wurzel $z^{\frac{1}{3}}$ ist mehrdeutig, es existieren 3 verschiedene Werte.
Analog bestimmt man die quartischen Einheitswurzeln $1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}$.

1.6.9 Potenzen

Um Potenzen komplexer Zahlen zu bilden, verwendet man am geeignetsten die Polarform $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$. Für $m \in \mathbb{Z}$ ist

$$z^m = r^m e^{\mathrm{i}m\varphi}\,.$$

Die gleiche Formel bleibt auch für rationale Exponenten $m = p/q \in \mathbb{Q}$ richtig, allerdings ist das Ergebnis aufgrund der Mehrdeutigkeit der n-ten Einheitswurzel nicht eindeutig. Da die Gleichung $w^q = 1$ die q Lösungen

$$w = w_q^{kp}, \quad w_q = \exp(2\pi\mathrm{i}/q)\,, \quad k = 0, \ldots, q-1$$

besitzt, erhält man entsprechend

$$r^{p/q}\exp(\mathrm{i}p\varphi/q)\, w_p^{kp}, \quad k = 0, \ldots, q-1$$

als mögliche Werte für $z^{p/q}$.

Beispiel:

Um die Potenz

$$z = (-1+\mathrm{i})^{2/3}$$

zu berechnen, wandelt man in Polarform um und erhält

$$\left(\sqrt{2}\exp\left(\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}\right)\right)^{2/3} = \sqrt[3]{2}\exp\left(\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\right) w_3^{2k}, \quad k = 0, 1, 2\,,$$

mit $w_3 = \exp(2\pi\mathrm{i}/3)$. Die möglichen Werte sind also:

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[3]{2}\,\mathrm{i}\,, \\ z_2 &= \sqrt[3]{2}\,\mathrm{i}\exp\left(\frac{4\pi\mathrm{i}}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\right)\,, \\ z_3 &= \sqrt[3]{2}\,\mathrm{i}\exp\left(\frac{8\pi\mathrm{i}}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\right)\,. \end{aligned}$$

Dies kann durch eine Probe bestätigt werden. Beispielsweise ist

$$z_2^3 = \left(\sqrt[3]{2}\,\mathrm{i}\exp\left(\frac{4\pi\mathrm{i}}{3}\right)\right)^3 = -2\,\mathrm{i}\,,$$

was mit $(-1+\mathrm{i})^2$ übereinstimmt.

Beispiel:

Für irrationale und imaginäre Exponenten erhält man im Allgemeinen unendlich viele Lösungen, wie die folgenden Beispiele zeigen:

- unendlich viele Lösungen auf dem Einheitskreis:

$$\begin{aligned} \mathrm{i}^\pi &= \exp((\pi/2+2\pi k)\mathrm{i})^\pi \\ &= \exp\left((\pi/2+2\pi k)\pi\mathrm{i}\right), \qquad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

- unendlich viele Lösungen auf einer Halbgeraden:

$$\begin{aligned} \pi^\mathrm{i} &= \exp(\ln\pi + 2\pi k\mathrm{i})^\mathrm{i} = \exp(\mathrm{i}\ln\pi - 2\pi k) \\ &= \exp(-2\pi k)\exp(\mathrm{i}\ln\pi), \qquad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

- unendlich viele Lösungen auf der positiven reellen Achse:

$$\begin{aligned} \mathrm{i}^\mathrm{i} &= \exp((\pi/2+2\pi k)\mathrm{i})^\mathrm{i} \\ &= \exp(-\pi/2-2\pi k), \qquad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

1.7 Aufgaben und Test

1.7.1 Aufgaben

Aufgabe 1 (Online-Nummer 953):
Überprüfen Sie sowohl durch Umformung, als auch mit Hilfe einer Wahrheitswerttabelle, ob die Ausdrücke

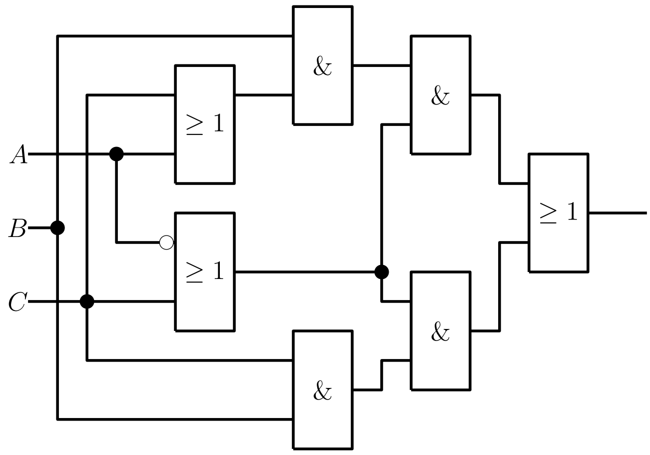
- $(A \vee B) \Rightarrow \big((\neg A \vee B) \wedge (A \Rightarrow \neg A)\big)$
- $\big(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)\big) \Leftrightarrow \big((A \wedge B) \Rightarrow C\big)$

Tautologien sind.

Aufgabe 2 (Online-Nummer 954):
Die Platzhalter $\diamondsuit$, $\square$ stehen jeweils für eine der logischen Operatoren aus der Menge $\{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$. In welchen Fällen gilt dann

$$A \diamondsuit (B \square C) \Leftrightarrow (A \diamondsuit B) \square (A \diamondsuit C)\ ?$$

Aufgabe 3 (Online-Nummer 25):
Vereinfachen Sie die folgende Schaltung:



Aufgabe 4 (Online-Nummer 950):
Gegeben sind die Mengen $A, B \neq \emptyset$, eine Abbildung $f : A \to B$ sowie die Teilmengen $U, V \subset A$ und $X, Y \subset B$. Zeigen bzw. widerlegen Sie mit Hilfe eines geeigneten Gegenbeispiels die folgenden Beziehungen:

a) $f(U \cup V) = f(U) \cup f(V)$ **b)** $f(U \cap V) = f(U) \cap f(V)$

c) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$ **d)** $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

Aufgabe 5 (Online-Nummer 33):
Drücken Sie die folgenden Aussagen über eine Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ in formaler Schreibweise aus:

a) f ist nicht surjektiv **b)** f ist nicht injektiv
c) f ist nicht bijektiv **d)** f ist weder surjektiv noch injektiv

Aufgabe 6 (Online-Nummer 1):
Beweisen Sie mit vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}$:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ **b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

Aufgabe 7 (Online-Nummer 957):
Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}$:

a) $a_n = n^3 + 5n$ ist durch 6 teilbar.

b) $b_n = \dfrac{n}{3} + \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n^3}{6}$ ist eine natürliche Zahl.

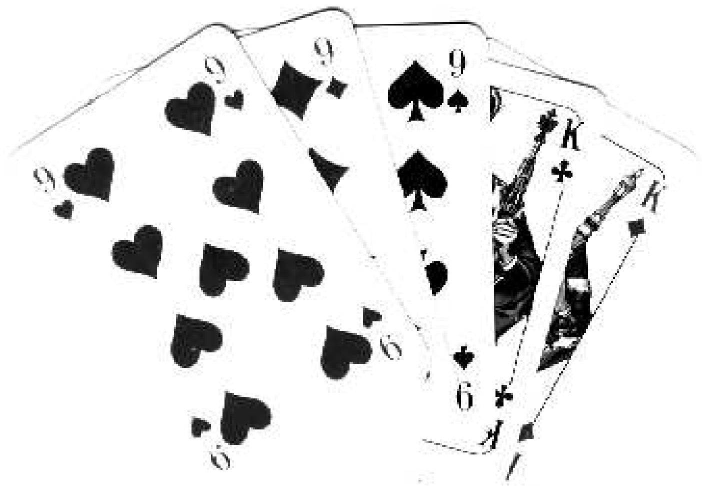
Aufgabe 8 (Online-Nummer 307):
Auf einer Party treffen sich 25 Personen. Wie viele Hände werden geschüttelt, wenn jeder Gast jedem anderen die Hand gibt.

Aufgabe 9 (Online-Nummer 186):
Beweisen Sie:

$$\textbf{a)}\quad \sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n} \qquad \textbf{b)}\quad \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n+k-\ell}{k} = \binom{n+k}{k+1}$$

Stellen Sie die Ergebnisse im Pascalschen Dreieck dar.

Aufgabe 10 (Online-Nummer 182):
Wie viele Möglichkeiten gibt es, beim Pokerspiel mit 32 Karten (8 Werte in 4 Farben) ein Full-House (drei gleiche Werte und zwei gleiche Werte) zu erhalten?



Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür, dass sich das abgebildete Blatt durch Tausch von zwei Karten auf einen Poker (vier gleiche Werte) verbessert?

Aufgabe 11 (Online-Nummer 5):
Geben Sie für folgende komplexe Zahlen eine Darstellung der Form $a + \mathrm{i}\, b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an:

a) $z = \dfrac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ **b)** $z = \dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}\,\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}\,\mathrm{i}}$ **c)** $z = \dfrac{(2+\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})^2}$

d) $z = (1-2\mathrm{i})^4$ **e)** $z = \sqrt[3]{\mathrm{i}}$ **f)** $z = \dfrac{\left[2(\cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12})\right]^7}{\left[4(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4})\right]^3}$

Aufgabe 12 (Online-Nummer 7):
Bestimmen Sie folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$ und skizzieren Sie diese in der Gaußschen Zahlenebene:

a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - \mathrm{i}| < 2\}$ **b)** $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,(z) \cdot \mathrm{Im}\,(z) \geq 1\}$

c) $\{z \in \mathbb{C} \mid z + \bar{z} - 2 \leq -\mathrm{i}(z - \bar{z}) \leq z + \bar{z} + 2\}$ **d)** $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \mathrm{Re}\,(\frac{1}{z}) \geq 1\}$

e) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \arg(z)\}$ **f)** $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < |z+3|\}$

g) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z - \mathrm{i}| < 2 \wedge |\arg(z) - \frac{\pi}{2}| \leq \frac{\pi}{4}\}$

1.7.2 Test

(Online-Test Nummer 95 enthält Aufgaben mit Varianten)

Aufgabe 1:
Ermitteln Sie den Wahrheitswert des logischen Ausdrucks

$$D: \ (A \Rightarrow B) \wedge (\neg C \vee A)$$

in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten der Aussagen A, B, C.

Antwort:

A	w	w	w	w	f	f	f	f
B	w	w	f	f	w	w	f	f
C	w	f	w	f	w	f	w	f
D								

Geben Sie jeweils entweder 'w' oder 'f' an.

Aufgabe 2:
Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B = \{4, 5, 6, 7\}$.
Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen zutreffen (`J` für „ja", `N` für „nein").

	$A \cup B$	$A \cap B$	$A \setminus B$	$\mathcal{P}(A)$
5 ist Element von				
$\{2, 3\}$ ist Teilmenge von				
$\{1, 4\}$ ist Element von				

Aufgabe 3:
Wie viele Relationen gibt es zwischen zwei jeweils dreielementigen Mengen A und B? Wie viele davon sind Abbildungen und wie viele der Abbildungen sind surjektiv?

Antwort:

Relationen gesamt:	
Abbildungen:	
surjektive Abbildungen:	

Aufgabe 4:
Untersuchen Sie, ob die folgenden Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ surjektiv, injektiv oder bijektiv sind:

a) $f(x) = x \sin x$ **b)** $f(x) = \exp\left(-x^3 + 1\right)$ **c)** $f(x) = x \ln \dfrac{1}{|x| + 1}$

Antwort:

a)	f ist surjektiv.	keine Angabe ◯	wahr ◯	falsch ◯
	f ist injektiv.	keine Angabe ◯	wahr ◯	falsch ◯
	f ist bijektiv.	keine Angabe ◯	wahr ◯	falsch ◯
b)	f ist surjektiv.	keine Angabe ◯	wahr ◯	falsch ◯
	f ist injektiv.	keine Angabe ◯	wahr ◯	falsch ◯
	f ist bijektiv.	keine Angabe ◯	wahr ◯	falsch ◯
c)	f ist surjektiv.	keine Angabe ◯	wahr ◯	falsch ◯
	f ist injektiv.	keine Angabe ◯	wahr ◯	falsch ◯
	f ist bijektiv.	keine Angabe ◯	wahr ◯	falsch ◯

Aufgabe 5:
Wie viele 5-stellige Zahlen gibt es mit

a) 5 verschiedenen Ziffern,

b) genau 2 ungeraden Ziffern?

Antwort: Anzahl der Zahlen:
a) ☐
b) ☐

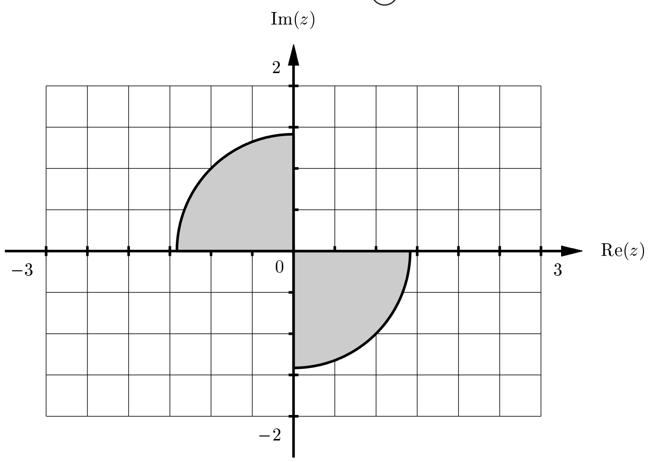
Aufgabe 6:
Wie viele Möglichkeiten gibt es, 9 Personen in 3 Dreiergruppen einzuteilen?
Antwort: ☐
Wie viele sind es, wenn zwei bestimmte Personen nicht in der gleichen Gruppe sein dürfen?
Antwort: ☐

Aufgabe 7:
Skizzieren Sie die Menge

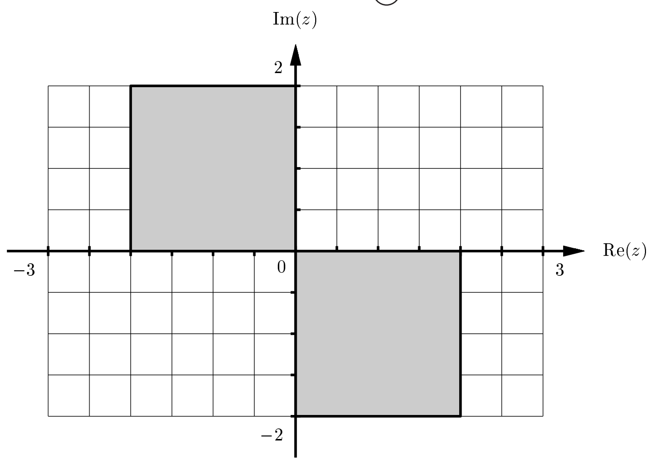
$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z^2| \leq 2 \quad \wedge \quad \mathrm{Im}(z^2) \leq 0 \right\}$$

in der Gaußschen Zahlenebene.
Welche Skizze entspricht der Menge M?

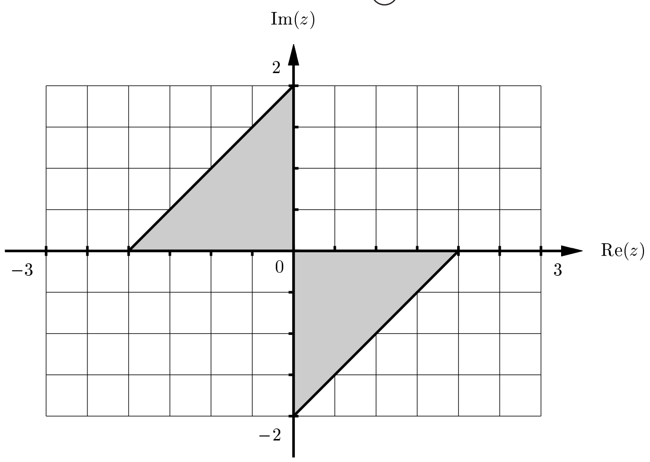
Skizze 1 ◯



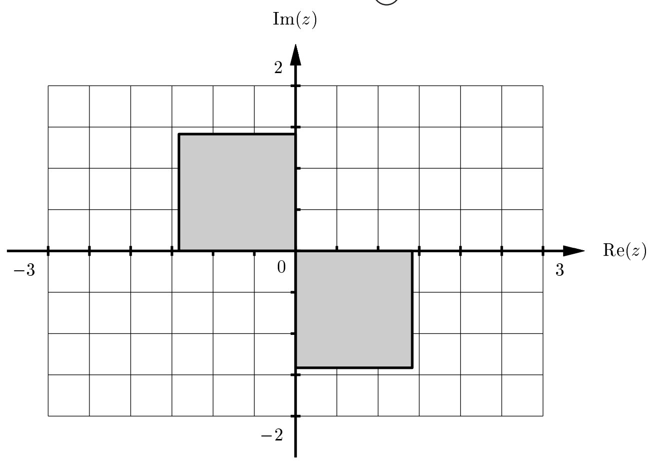
Skizze 2 ◯



Skizze 3 ◯



Skizze 4 ◯



Bestimmen Sie Realteil und Imaginärteil von $z_1 = \left(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^3$ und von $z_2 = -1 + \dfrac{(1+\mathrm{i})^8}{\mathrm{i}}$.

Re z_1 =	☐	Im z_1 =	☐
Re z_2 =	☐	Im z_2 =	☐

(Auf vier Dezimalstellen runden.)

Aufgabe 8:

Sind die angegebenen Aussagen für alle $z, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ gültig?

Aussage	Ja	Nein
$\lvert z\rvert^2 = z^2$	○	○
$z_1 \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1} \cdot z_2$	○	○
$\lvert\, \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}\, \rvert = \lvert z_1 \cdot z_2\rvert$	○	○
$\lvert \mathrm{i}z\rvert = \lvert z\rvert$	○	○
$\lvert(1-\mathrm{i})z\rvert = \lvert z\rvert + \lvert \mathrm{i}z\rvert$	○	○
$\lvert z_1 + z_2 + z_3\rvert \le \lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert + \lvert z_3\rvert$	○	○
$\lvert z_1 - z_2\rvert \le \lvert z_1\rvert - \lvert z_2\rvert$	○	○
$\lvert z_1 + z_2\rvert \ge \big\lvert \lvert z_1\rvert - \lvert z_2\rvert \big\rvert$	○	○
$\mathrm{Re}\ z = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$	○	○
$\mathrm{Im}\ z = \dfrac{z - \overline{z}}{2}$	○	○

Kapitel 2

Analysis

2.1 Folgen

2.1.1 Folge

Eine Folge in einer Menge M ist eine Abbildung $a : \mathbb{N}_0 \to M$, die jeder Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ ein Element a_n zuordnet.
Man schreibt $(a_0, a_1, a_2, ...)$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ oder einfach (a_n).

2.1.2 Supremum und Infimum

Eine Teilmenge M von $\mathbb{R}$ ist nach oben beschränkt, wenn eine Schranke b existiert, so dass

$$x \leq b \quad \forall x \in M\,.$$

Man nennt $b \in \mathbb{R}$ ein Maximum von M ($b = \max M$), wenn b eine obere Schranke von M und $b \in M$ ist.
Man bezeichnet b als Supremum von M, ($b = \sup M$) wenn b die kleinste obere Schranke ist. Dabei muss b selbst nicht in M enthalten sein.

Analog definiert man eine untere Schranke, das Minimum ($\min M$) und das Infimum ($\inf M$) von M.

Das sogenannte Vollständigkeitsaxiom reller Zahlen besagt, dass jede nach oben (unten) beschränkte nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Supremum (Infimum) in $\mathbb{R}$ hat.

Beispiel:

Sei $M = (0,1) = \{x : x \in \mathbb{R},\ 0 < x < 1\}$. Dann hat M kein Maximum, denn falls $x \in M$ ist, so existiert ein $y > x$ in M, z. B. $y = \dfrac{x+1}{2}$.
Das heißt auch, dass jede obere Schranke von M größer oder gleich 1 ist. Wegen $x < 1$ für alle $x \in M$ ist $\sup M = 1$.
Weiterhin hat M kein Minimum, denn falls $x \in M$ ist, so existiert ein $y \in M$ mit $y < x$, z. B. $y = \dfrac{x}{2}$.
Dies zeigt auch, dass jede untere Schranke von M kleiner oder gleich Null ist und damit $\inf M = 0$ sein muss.

2.1.3 Grenzwert einer Folge

Eine Folge

$$(a_n) = a_1, a_2, \ldots$$

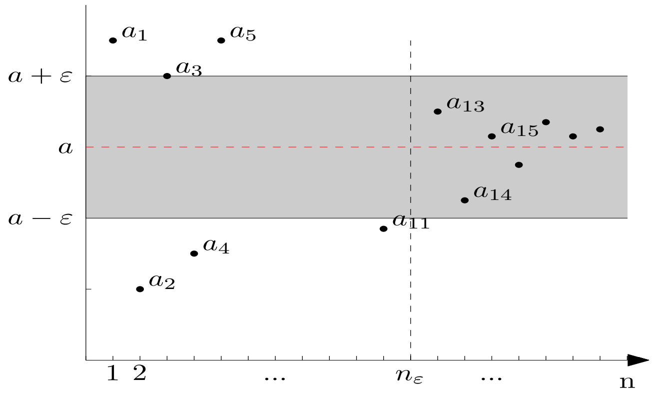
konvergiert gegen einen Grenzwert a,

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n,$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_ε gibt mit

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

für alle $n > n_\varepsilon$.



Man benutzt ebenfalls die Schreibweise $a_n \to a$ für eine konvergente Folge. Besitzt (a_n) keinen Grenzwert, so bezeichnet man die Folge als divergent.

Beispiel:

Um das Konvergenz-Kriterium

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ für } n > n_\varepsilon$$

nachzuweisen, kann man zunächst den Ausdruck $|a_n - a|$ durch Abschätzung nach oben vereinfachen und dann die so gewonnene Ungleichung nach n auflösen.

Wendet man dies beispielsweise für die Folge

$$a_n = \frac{n^2 + n}{n^2 + 1},$$

die den Grenzwert $a = 1$ besitzt, an, ist eine mögliche Abschätzung

$$|a_n - a| = \left|\frac{n^2 + n}{n^2 + 1} - 1\right| = \left|\frac{n - 1}{n^2 + 1}\right| \le \frac{n}{n^2 + 1},$$

da $|n - 1| \le n$ für alle $n \ge 0$. Ausserdem ist $n^2 + 1 > n^2$ und damit auch $\dfrac{1}{n^2 + 1} < \dfrac{1}{n^2}$. Also folgt daraus

$$|a_n - a| \le \frac{n}{n^2 + 1} \le \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Damit $\frac{1}{n} < \varepsilon$ ist, muss $n > \frac{1}{\varepsilon}$ sein. Wählt man nun n_ε als eine natürliche Zahl größer als $\frac{1}{\varepsilon}$, dann gilt für alle $\varepsilon > 0$ und alle $n > n_\varepsilon$

$$|a_n - a| < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Beispiel:

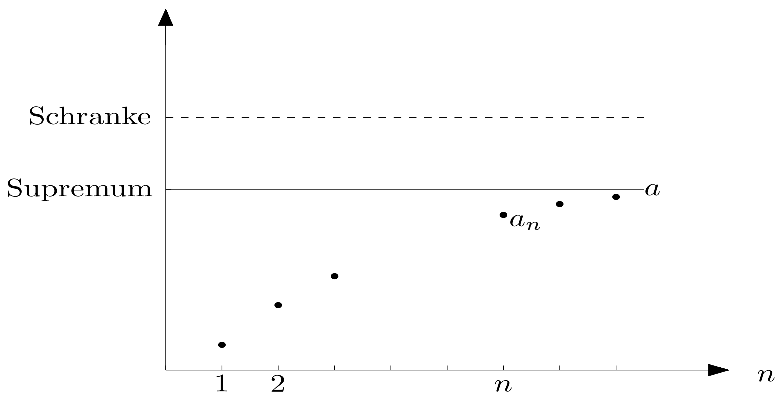
Die Folge

$$1, q, q^2, \ldots$$

besitzt für $|q| < 1$ den Grenzwert 0 und divergiert für $|q| > 1$ oder $q = -1$.

2.1.4 Monotone Konvergenz

Eine Folge (a_n) heißt monoton wachsend bzw. monoton fallend, wenn $a_{n+1} \geq a_n$ bzw. $a_{n+1} \leq a_n$ für alle n. Sie heißt streng monoton wachsend bzw. streng monoton fallend, wenn $a_{n+1} > a_n$ bzw. $a_{n+1} < a_n$ für alle n.



Eine beschränkte, für $n > n_0$ monoton wachsende oder fallende Folge (a_n) ist konvergent. Der Grenzwert ist das Supremum bzw. Infimum der Folgenelemente a_n, $n > n_0$.

Beweis:

Für eine monoton wachsende Folge folgt mit der Definition des Supremums, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein n_ε existiert.

$$a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a = \sup_{n > n_0} a_n$$

Aufgrund der Monotonie ist

$$a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a_n \leq a, \text{ für } n > n_\varepsilon \text{ ,}$$

also $a_n \to a$.
Für monoton fallende Folgen argumentiert man analog.

Beispiel:

Die Konvergenz der Folge
$$a_n = (1 + 1/n)^n, \quad n = 0, 1, ...,$$
gegen die Eulersche Zahl e kann mit dem Satz über monotone Konvergenz gezeigt werden. Beide Voraussetzungen können mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes bewiesen werden.

(i) Beschränktheit: Aus
$$a_n = (1 + 1/n)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + ...$$
und
$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} \leq \frac{n^k}{1\cdot 2\cdots 2}$$
folgt
$$a_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... \leq 3$$
(ii) Monotonie: Man berechnet a_{n+1} ebenfalls mit dem binomischen Lehrsatz:
$$a_{n+1} = 1 + \binom{n+1}{1}\frac{1}{n+1} + \binom{n+1}{2}\frac{1}{(n+1)^2} + \binom{n+1}{3}\frac{1}{(n+1)^3} + ...$$
Vergleicht man mit der Darstellung von a_n in (i), so stellt man fest, dass die entsprechenden Terme größer sind:
$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}\frac{1}{n^k} \quad &\leq \quad \frac{(n+1)\cdot n\cdots(n-k+2)}{1\cdot 2\cdots k}\frac{1}{(n+1)^k} \quad = \\ &= \quad \binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k}.\end{aligned}$$
Dies folgt aus der Ungleichung
$$\frac{n-j}{n} \leq \frac{n+1-j}{n+1}$$
für die einzelnen Faktoren. Da die Summe für a_{n+1} noch den Term $\dfrac{1}{(n+1)^{n+1}}$ enthält folgt
$$a_n < a_{n+1}.$$

2.1.5 Rechenregeln für Grenzwerte bei Folgen

Für konvergente Folgen (a_n) und (b_n) mit Grenzwerten a und b gilt:

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n/b_n) = a/b$, falls $b \neq 0$

Beweis:

Summe und Differenz: Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \to 0.$$

Produkt: Da a_n beschränkt ist, folgt

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \to 0.$$

Quotient: Für $n > n_0$ ist

$$0 \notin \left(b - \frac{|b|}{2}, b + \frac{|b|}{2}\right) \ni b_n \,,$$

und es folgt

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{bb_n}\right| \leq \text{ const } |b_n - b| \to 0,$$

d. h. $1/b_n \to 1/b$. Die Konvergenz von a_n/b_n folgt nun aus der bereits bewiesenen Regel für Produkte konvergenter Folgen.

Beispiel:

Sind die Folgenelemente rationale Funktionen von n, $a_n = \frac{p(n)}{q(n)}$, so lässt sich der Grenzwert nach Kürzen durch die höchste Potenz ermitteln. Beispielsweise ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n - 2n^2}{3n^2 + 4n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n - 2}{3 + 4/n} = -\frac{2}{3}\,.$$

Allgemein gilt für Zähler-Grad j und Nenner-Grad k

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_j n^j + \cdots p_0}{q_k n^k + \cdots q_0} = \begin{cases} 0, & \text{für } j < k \\ \frac{p_j}{q_k}, & \text{für } j = k. \end{cases}$$

Für $j > k$ divergiert die Folge.

Beispiel:

Mit Hilfe der bekannten Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

folgt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2-1)^n}{n^{2n}} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e \cdot \frac{1}{e} = 1. \end{aligned}$$

Man berücksichtige, daß

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \neq \left(\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^n = 1\,,$$

da die Anzahl der Faktoren des Produktes nicht konstant sind.

2.1.6 Cauchy-Kriterium

Eine Folge (a_n) konvergiert genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein n_ε existiert, so dass

$$|a_j - a_k| < \varepsilon$$

für alle $j, k > n_\varepsilon$.
Mit Hilfe dieses auf Cauchy zurückgehende Kriteriums ist der Nachweis der Konvergenz ohne Kenntnis des Grenzwertes möglich.

Beweis:

Die Notwendigkeit des Cauchy-Kriteriums folgt aus der Definition des Grenzwerts:

$$a = \lim a_n \iff |a_m - a| < \varepsilon \text{ für } m > m_\varepsilon$$

Setzt man $n_\varepsilon = m_{\varepsilon/2}$, so gilt

$$|a_j - a_k| \leq |a_j - a| + |a - a_k| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

für $j, k > n_\varepsilon$, wie behauptet.
Dass die Bedingung auch hinreichend ist, ist schwieriger zu zeigen, und beruht auf der Vollständigkeit der reellen Zahlen.

Beispiel:

Bei rekursiv definierten Folgen (a_n) läßt sich das Cauchy-Kriterium oft durch Nachweis der Abschätzung

$$|a_{n+1} - a_n| \leq cq^n$$

mit $q \in [0, 1)$ verifizieren. Diese sogenannte geometrische Konvergenz impliziert für $j < k$

$$|a_j - a_k| \leq |a_j - a_{j+1}| + |a_{j+1} - a_{j+2}| + \quad \ldots \quad + |a_{k-1} - a_k| \leq cq^j\,(1 + q + q^2 + \ldots) \leq \frac{cq^j}{1-q}.$$

Die rechte Seite ist für $< \varepsilon$ für $j, k > n_\varepsilon = \ln \frac{\varepsilon(1-q)}{c} / \ln q$, das Cauchy-Kriterium also erfüllt.
Für die konkrete, durch

$$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}, \quad a_0 = 1,$$

rekursiv definierte Folge a_n verwendet man zum Nachweis der geometrischen Konvergenz Induktion.
Induktionsanfang $(n = 1)$: Die Ungleichung

$$|a_1 - a_0| \leq cq$$

gilt, wenn $c = |a_1 - a_0|/q$ gesetzt wird.
Induktionsschluss $(n \to n + 1)$: Man schreibt die abzuschätzende Differenz in der Form

$$|a_{n+1} - a_n| = |\sqrt{2 + a_n} - \sqrt{2 + a_{n-1}}| = \left| \frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{2 + a_n} + \sqrt{2 + a_{n-1}}} \right|.$$

Nach Induktions-Voraussetzung ist die rechte Seite $\leq \frac{1}{2\sqrt{2}} cq^n$ und mit der Wahl $q = 1/2\sqrt{2} \leq cq^{n+1}$ wie gewünscht.

2.2 Reihen

2.2.1 Grenzwert einer Reihe

Eine Summe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ mit unendlich vielen Summanden bezeichnet man als Reihe. Sie konvergiert gegen einen Grenzwert

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k,$$

wenn die Folge (s_n) der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

gegen s konvergiert. Existiert kein Grenzwert, so bezeichnet man die Reihe als divergent.
Der Grenzwert kann von der Reihenfolge der Summanden abhängen, bzw. braucht nach dem Umordnen nicht mehr zu existieren.
Notwendig für die Konvergenz einer Reihe ist, dass

$$\lim a_n = 0.$$

Beispiel:

Nur in wenigen Fällen ist die explizite Berechnung einer Reihe möglich. Ein Beispiel sind bestimmte Reihen mit rationalen Summanden wie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1} = \frac{3}{2}.$$

Nach der Partialbruchzerlegung

$$\frac{2}{n^2-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1},$$

lässt sich diese Reihe in der Form

$$\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \ldots$$

schreiben. Bis auf $\frac{1}{1}$ und $\frac{1}{2}$ heben sich alle Summanden auf, so dass der Grenzwert $\frac{3}{2}$ unmittelbar abgelesen werden kann.
Für die Differenz der Partialsummen gilt für $n < m$

$$|s_n - s_m| = \left|\left(\tfrac{1}{n-1} - \tfrac{1}{n+1}\right) + \left(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+2}\right) + \ldots + \left(\tfrac{1}{m-3} - \tfrac{1}{m-1}\right) + \left(\tfrac{1}{m-2} - \tfrac{1}{m}\right)\right| \leq \tfrac{4}{n-1},$$

da sich die mittleren Terme aufheben. Die Partialsummen bilden also eine Cauchy-Folge:

$$|s_n - s_m| < \varepsilon \text{ für } n > 1 + \frac{4}{\varepsilon}.$$

Die Differenz zum Grenzwert ist

$$\left|\frac{3}{2} - s_n\right| = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} < \frac{2}{n}.$$

Das Beispiel zeigt auch, dass die Reihenfolge der Summanden im allgemeinen wesentlich ist. Wählt man die Reihenfolge

$$\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}-\frac{1}{6}\right)+\ldots,$$

so ist jeder Ausdruck in Klammern $\geq \frac{1}{4}$, die Reihe also divergent.

2.2.2 Geometrische Reihe

Die geometrische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert genau, dann wenn $|q|<1$.
Mit der geometrischen Summenformel

$$s_n = 1+q+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

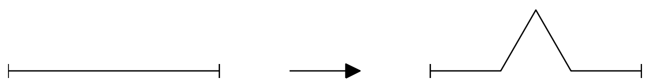
läßt sich der Grenzwert explizit berechnen:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1+q+q^2+q^3+\cdots+q^n+\cdots = \frac{1}{1-q}$$

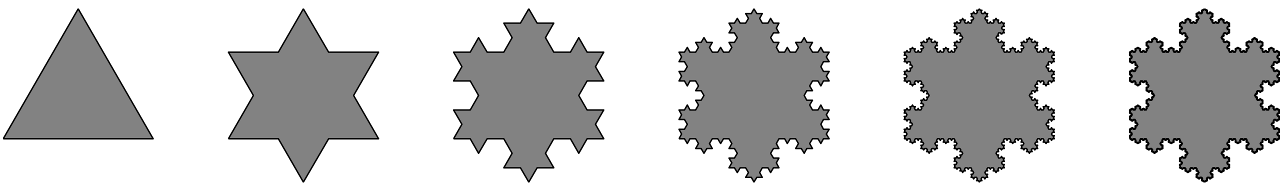
für $|q|<1$.

Beispiel:

Ersetzt man ausgehend von einem gleichseitigen Dreieck rekursiv Kanten gemäß der Vorschrift



so entsteht eine Menge mit fraktalem Rand, die sogenannte Koch-Schneeflocke.



Die n-te Schneeflocke hat $3\cdot 4^n$ Kanten. Da sich die Kantenlänge in jedem Schritt um einen Faktor 1/3 reduziert, erhält man für den Umfang

$$\text{Kantenzahl}*\text{Kantenlänge: } (3\cdot 4^n)\,(3^{-n}) = 3\,\left(\tfrac{4}{3}\right)^n \to \infty\,,$$

d. h. die Länge des Randes divergiert.
Im n-ten Schritt werden $3\cdot 4^{n-1}$ gleichseitige Dreiecke mit Kantenlänge 3^{-n} und Fläche $\sqrt{3}/4\,(3^{-n})^2$ hinzugefügt. Somit ergibt sich für den Flächeninhalt der n-ten Schneeflocke

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{4}+\sum_{i=1}^{n}\left(3\cdot 4^{i-1}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(3^{-i}\right)^2\right) &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\frac{4^{i-1}}{9^{i-1}}\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{4}{9}\right)^i\right).\end{aligned}$$

Die fraktale Grenzmenge hat folglich den Flächeninhalt

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-4/9}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

(Online-Version enthält Download, siehe Anhang A)

2.2.3 Harmonische Reihe

Die harmonische Reihe:

$$s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k},$$

divergiert bzw. hat den uneigentlichen Grenzwert $s=\infty$.
Allgemeiner ist die Reihe

$$s_\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-\alpha}$$

für $\alpha\le 1$ divergent und für $\alpha>1$ konvergent. Einige spezielle Werte sind

$$\begin{aligned} s_2 &= \sum_{k=1}^{\infty}k^{-2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6},\\ s_4 &= \sum_{k=1}^{\infty}k^{-4}=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{90},\\ s_6 &= \sum_{k=1}^{\infty}k^{-6}=\frac{1}{1^6}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\ldots=\frac{\pi^6}{945}. \end{aligned}$$

2.2.4 Cauchy-Kriterium für Reihen

Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k$ konvergiert genau, dann wenn wenn für alle $\varepsilon>0$ ein n_ε existiert, so dass für $n>m>n_\varepsilon$ gilt:

$$|a_{m+1}+a_{m+2}+\ldots+a_n|<\varepsilon.$$

Für die Partialsummen s_n und s_m ist $s_n-s_m=a_{m+1}+a_{m+2,}+\ldots+a_n$, also entspricht die obige Aussage dem Cauchy-Kriterium für Folgen:

$$s_n\text{konvergiert} \;\Leftrightarrow\; s_n\text{ist eine Cauchy-folge.}$$

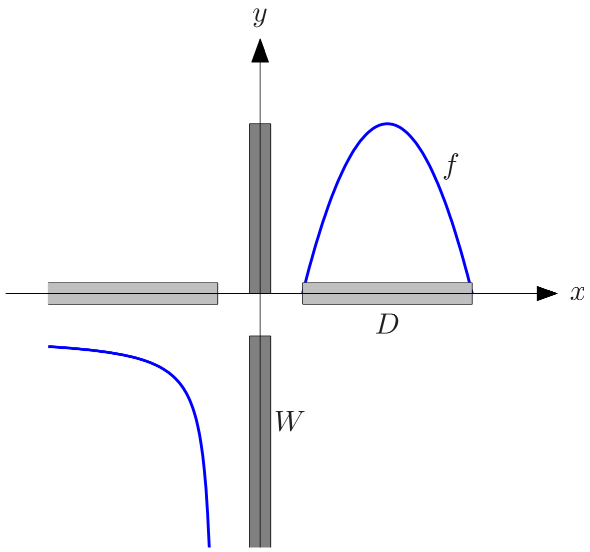
2.3 Funktionen

2.3.1 Funktion

Eine Funktion

$$f:D\to\mathbb{R},\quad x\mapsto f(x)$$

ordnet jedem Argument x aus dem Definitionsbereich $D\subseteq\mathbb{R}$ einen Wert $f(x)$ aus dem Wertebereich $W\subseteq\mathbb{R}$ zu.
Der Graph von f besteht aus den Paaren (x,y) mit $y=f(x)$.



Wie aus der Abbildung ersichtlich ist, sind der Definitionsbereich (hellgrau) und der Wertebereich (dunkelgrau) die Projektionen des Graphen auf die x- bzw. y-Achse.

Beispiel:

Um den Definitionsbereich und den Wertebereich der Funktion

$$f(x) = \frac{\ln(3-x)}{\sqrt{x}-1}$$

zu bestimmen, sind zunächst die Einschränkungen an die auftretenden elementaren Funktionen zu berücksichtigen. Das Argument des Logarithmus muss positiv und das der Wurzel nichtnegativ sein:

$$3 - x > 0 \quad \text{und} \quad x \geq 0.$$

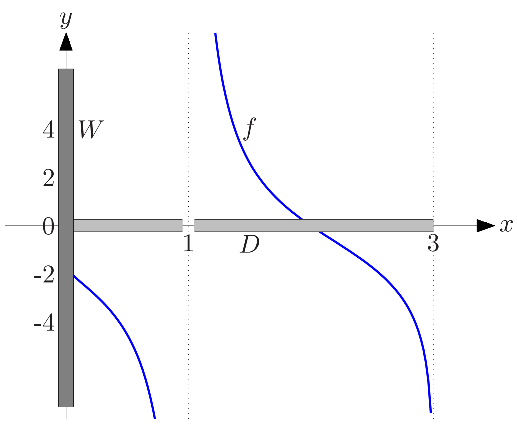
Ebenfalls darf der Nenner nicht Null werden, d.h.

$$x \neq 1\,.$$

Insgesamt ergibt sich:

$$\mathrm{D} = [0,3)\backslash\{1\} = [0,1) \cup (1,3).$$

Der Wertebereich von f wird durch Zeichnen des Graphen deutlich.



Da f für $x \in (1,3)$ alle Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annimmt, gilt $W = \mathbb{R}$.

Beispiel:

Die folgende Tabelle zeigt die Definitions- und Wertebereiche einiger elementarer Funktionen:

$f(x)$	D	W
$1/x$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\ln x$	$(0,\infty)$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\mathbb{R}\setminus\{x\,:\,x=(2k+1)\pi/2,\ k\in\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$[0,\infty)$	$[0,\infty)$

2.3.2 Umkehrfunktion

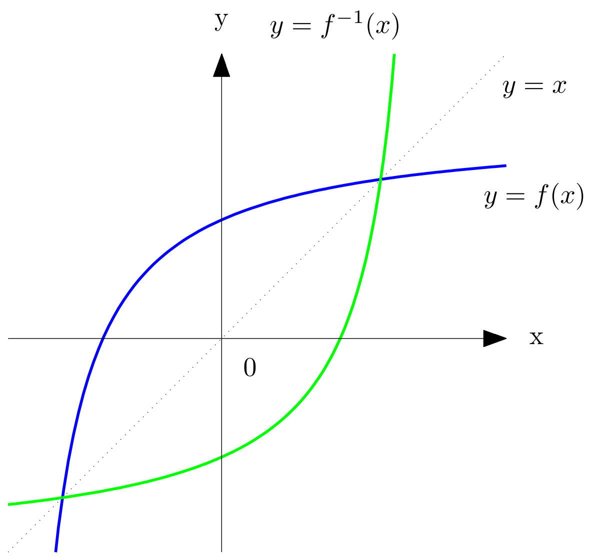
Die Umkehrfunktion einer injektiven Funktion $f : D \to W$ mit Definitionsbereich D und Wertebereich $W \subseteq \mathbb{R}$ ist durch

$$f^{-1} : W \to D \subseteq \mathbb{R},\ x \mapsto f^{-1}(x)$$

definiert. Dabei gilt

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Der Definitionsbereich der Umkehrfunktion ist der Wertebereich von f. Ihr Graph $y = f^{-1}(x)$ ist das Spiegelbild des Graphen von f an der ersten Winkelhalbierenden ($y = x$):



Die Schreibweise $f^{-1}(x)$ kann leicht zu Verwechslungen mit dem Kehrwert $f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$ führen. Insbesondere, wenn das Argument x der Funktion weggelassen wird, sollte aus dem Zusammenhang klar sein, was gemeint ist.

Beispiel:

Die Umkehrfunktion wird praktisch durch Vertauschen von x und y berechnet. Für die Funktion

$$f : \mathbb{R}\backslash(-1,1] \to \mathbb{R}\backslash(-1,1] \text{ mit } f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$$

erhalten wir z.B.:

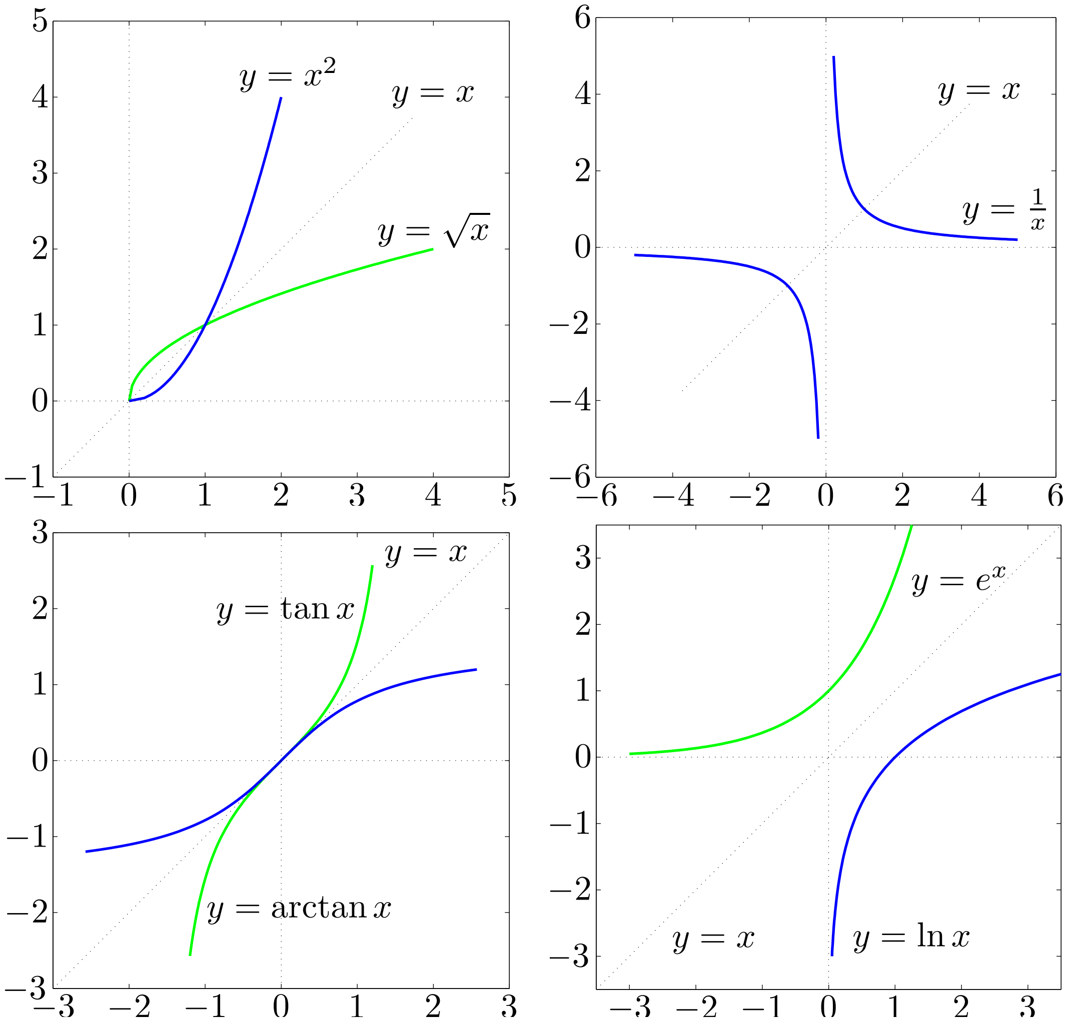
$$y^2 = \frac{x^2-1}{(x-1)^2} = \frac{x+1}{x-1} \implies y^2x - y^2 = x+1$$

$$\implies x(y^2-1) = y^2+1 \implies x = \frac{y^2+1}{y^2-1}.$$

Die Umkehrfunktion von f ist also $f^{-1} : \mathbb{R}\backslash(-1,1] \to \mathbb{R}\backslash(-1,1]$ mit $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

Beispiel:

Die folgenden Abbildungen zeigen Beispiele einiger Umkehrfunktionen.



In der nachfolgenden Tabelle sind die jeweiligen Definitionsbereiche angegeben:

f	D	f^{-1}	D
x^2	$\mathbb{R}$	$\sqrt{x}$	$[0,\infty)$
e^x	$\mathbb{R}$	$\ln(x)$	$(0,\infty)$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\tan x$	$\mathbb{R}\setminus\{x \,:\, x=(2z+1)\pi/2\ , z\in\mathbb{Z}\}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$

2.3.3 Monotone Funktion

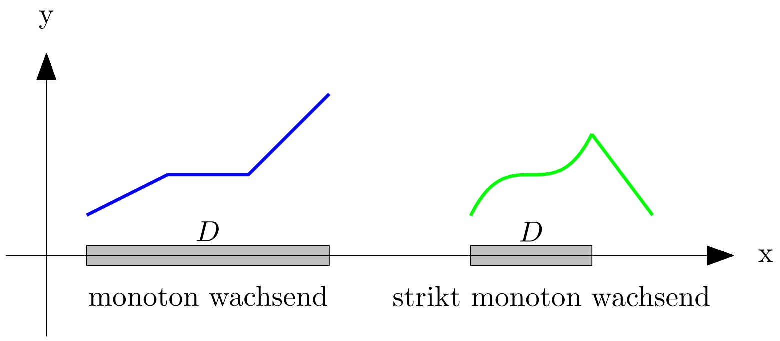
Eine Funktion f ist auf einem Intervall D (strikt) monoton wachsend, wenn

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \overset{(<)}{\leq} f(x_2), \quad x_k \in D,$$

bzw., falls f stückweise stetig differenzierbar ist, wenn

$$f'(x) \overset{(>)}{\geq} 0$$

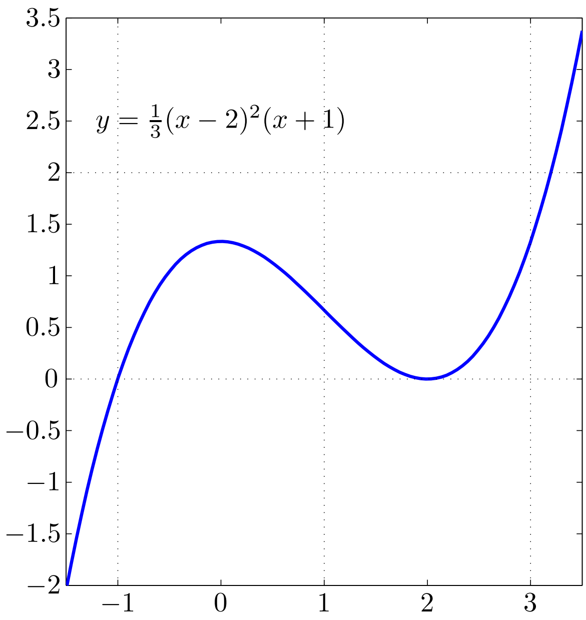
für alle $x \in D$ bis auf isolierte Punkte.



Analog definiert man (strikt) monoton fallend.

Beispiel:

Die Funktion $x \mapsto f(x) = \frac{1}{3}(x-2)^2(x+1)$ hat an der Stelle $x = 0$ einen Hochpunkt ($f'(0) = 0, f''(0) < 0$) und an der Stelle $x = 2$ einen Tiefpunkt ($f'(2) = 0, f''(2) > 0$). Für $x \leq 0$ und $x \geq 2$ ist die Funktion strikt monoton steigend und für $0 \leq x \leq 2$ strikt monoton fallend.

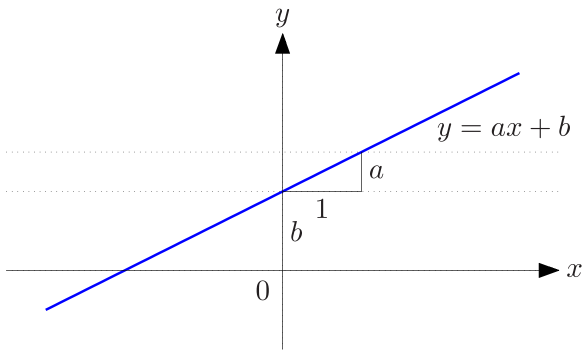


2.3.4 Lineare Funktion

Der Graph einer linearen Funktion

$$f(x) = ax + b$$

ist eine Gerade mit Steigung a und y-Achsenabschnitt b.



Alternative Darstellungen sind die Punkt-Steigungs-Form

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = a$$

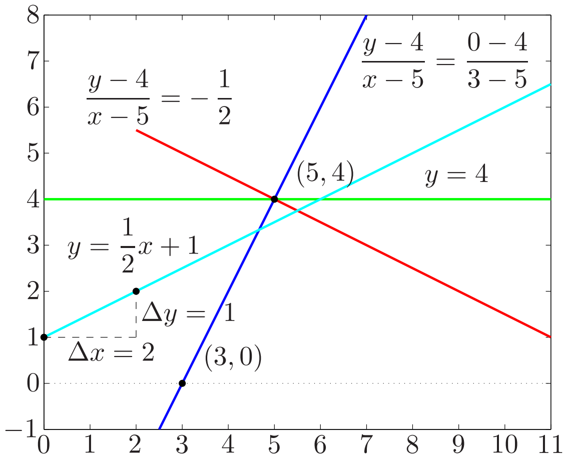
und die Zwei-Punkte-Form

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

wobei (x_0, y_0) und (x_1, y_1) Punkte auf der Geraden sind.

Beispiel:

Die Abbildung illustriert die unterschiedlichen Darstellungsformen linearer Funktionen:



2.3.5 Quadratische Funktion

Der Graph einer quadratischen Funktion

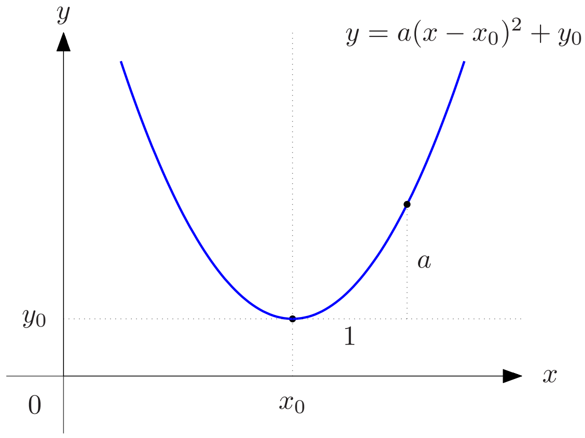
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

ist eine Parabel der Form

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

mit Scheitel

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right).$$

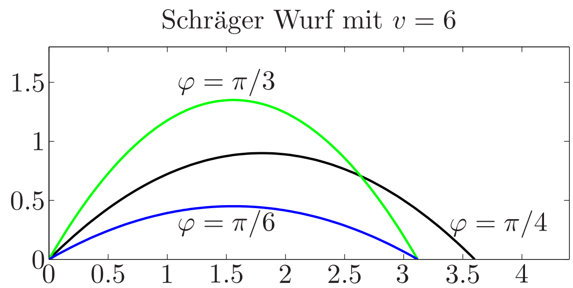


2.3.6 Schräger Wurf

Wird ein Körper unter einem Winkel φ mit einer Geschwindigkeit v geworfen, beschreibt die Flugbahn die Parabel

$$y = x\tan\varphi - \frac{g}{2v^2\cos^2\varphi}x^2$$

wobei g die Erdbeschleunigung ist.



Die Gleichung ergibt sich aus der Aufspaltung der gleichförmigen Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit v in die x- und y-Komponente und der Überlagerung durch die beschleunigte Bewegung des freien Falls:

$$\begin{aligned} x(t) &= vt\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v\cos\varphi} \\ y(t) &= vt\sin\varphi - \frac{1}{2}gt^2 \\ \Rightarrow y(x) &= \frac{vx\sin\varphi}{v\cos\varphi} - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\varphi} = x\left(\tan\varphi - \frac{gx}{2v^2\cos^2\varphi}\right). \end{aligned}$$

Die Wurfweite ist

$$x = \frac{2v^2\cos^2\varphi}{g}\tan\varphi = \frac{v^2}{g}\sin(2\varphi).$$

Diese wird maximal für $\varphi = \pi/4 \mathrel{\widehat{=}} 45°$.

2.3.7 Polynom

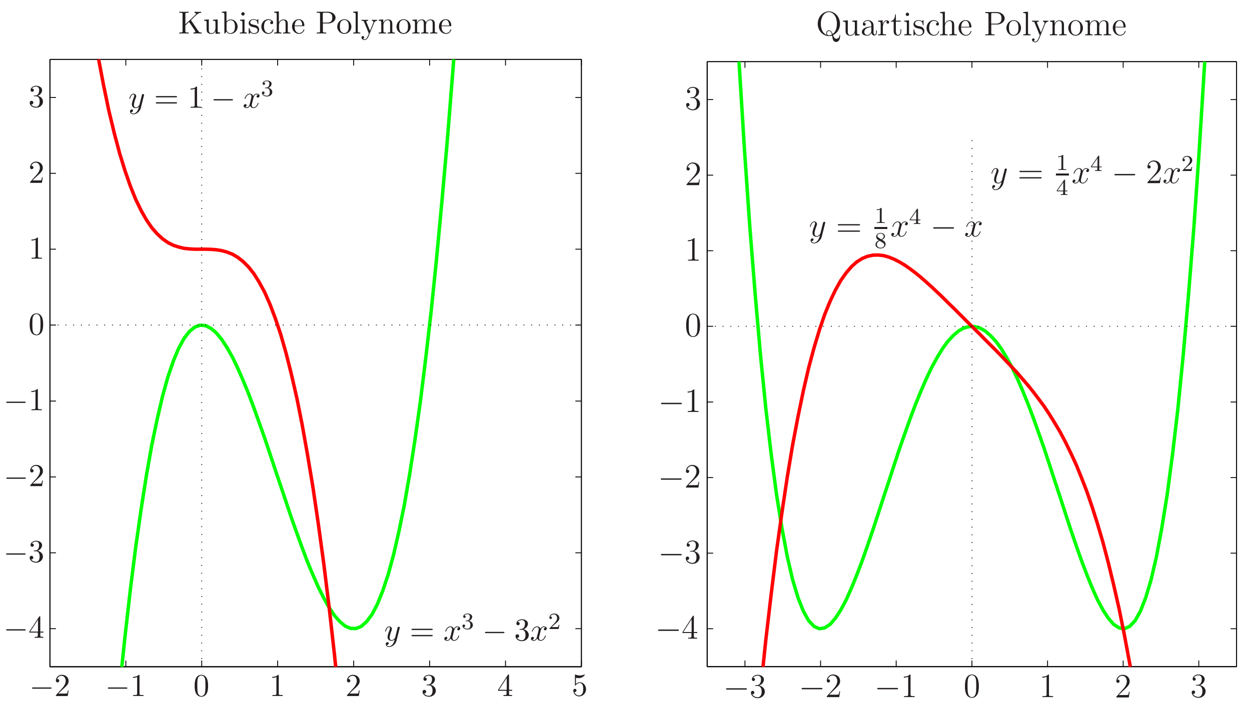
Ein Polynom p vom Grad n lässt sich in der Form

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

mit $a_n \neq 0$ schreiben.
Die Variable x und die Koeffizienten a_k können reell oder komplex sein. Entsprechend spricht man von einem reellen bzw. komplexen Polynom.

Beispiel:

Die folgenden Abbildungen zeigen kubische ($n = 3$) und quartische ($n = 4$) Polynome mit qualitativ verschiedenen Funktionsgraphen.



2.3.8 Rationale Funktion

Eine rationale Funktion r mit Zählergrad m und Nennergrad n ist der Quotient zweier Polynome:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n}\,.$$

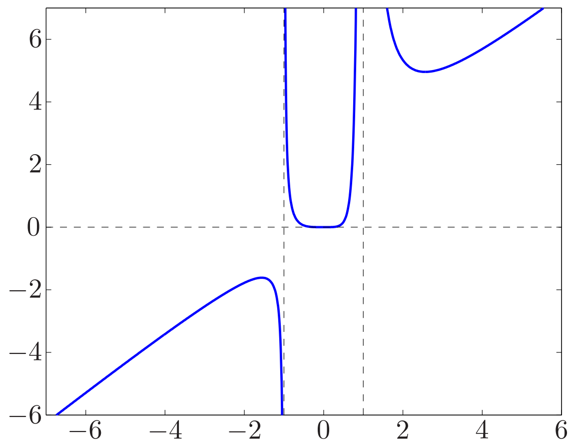
Diese Darstellung bezeichnet man als irreduzibel, wenn p und q keinen gemeinsamen Linearfaktor besitzen. Die Nullstellen des Nenners sind dann Definitionslücken der rationalen Funktion r und werden als Polstellen bezeichnet. Ihre Ordnung entspricht der Vielfachheit der Nullstelle.
Die Variable x und die Koeffizienten a_k, b_k können reell oder komplex sein. Entsprechend spricht man von einer reellen oder komplexen rationalen Funktion.

Beispiel:

Die Funktion

$$f(x) = \frac{x^4}{(x+1)(x-1)^2}$$

besitzt einen einfachen Pol bei $x = -1$ und einen doppelten Pol bei $x = 1$.



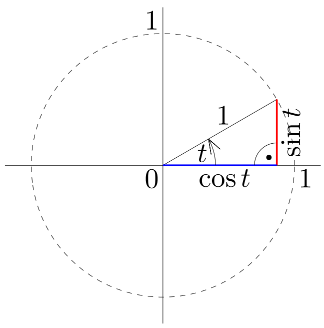
Man erkennt aus der Abbildung, dass f bei einem einfachen Pol das Vorzeichen wechselt und sich das Vorzeichen bei einem doppelten Pol nicht ändert.

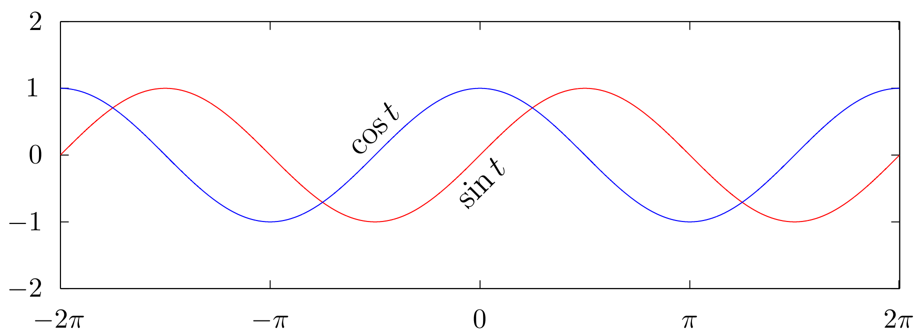
2.3.9 Sinus und Kosinus

Mit

$$(\cos t, \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

werden die Koordinaten des um den Ursprung mit Winkel t gedrehten Punktes $(1, 0)$ bezeichnet. Bis auf das Vorzeichen entsprechen also Kosinus und Sinus den Verhältnissen von Katheten zur Hypothenuse in einem rechtwinkligen Dreieck.





Die beiden Kreisfunktionen sind 2π-periodisch und es gilt

- $\cos t = \sin(t + \pi/2)$,
- $\cos t = \cos(-t), \quad \sin t = -\sin(-t)$,
- $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.

Einige spezielle Werte sind:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

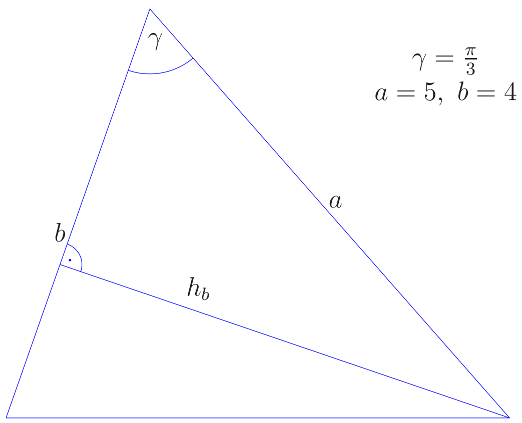
Beispiel:

Um den Flächeninhalt F des abgebildeten Dreiecks zu bestimmen, berechnet man zunächst die Höhe h_b:

$$\sin\gamma = \frac{h_b}{a} \Rightarrow h_b = a\sin\gamma\,.$$

Damit folgt

$$F = \frac{1}{2}ab\sin\gamma\,.$$



Für die angegebenen Werte erhält man

$$F = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\,.$$

2.3.10 Additionstheoreme für Sinus und Kosinus

Für die Kreisfunktionen $\sin t$ und $\cos t$ gelten folgende Beziehungen:

- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha+\beta) = \sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta$

Insbesondere ist

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \qquad \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Beispiel:

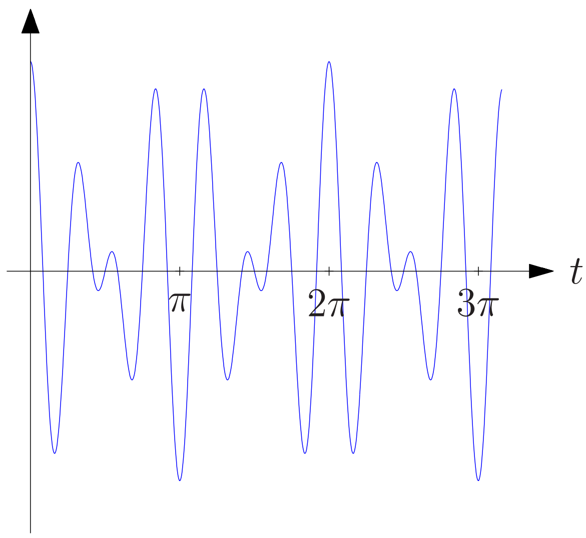
Die Funktion

$$u(t) = \cos(w_1 t) + \cos(w_2 t)$$

beschreibt die Überlagerung von zwei Schwingungen. Mit Hilfe der Additionstheoreme lässt sich die Darstellung vereinfachen. Mit $\overline{w} = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)$ und $\Delta w = |w_1 - \overline{w}|$ folgt aus

$$\begin{aligned} \cos(\overline{w} - \Delta w t) &= \cos(\overline{w}t)\cos(\Delta w t) + \sin(\overline{w}t)\sin(\Delta w t) \\ \cos(\overline{w} + \Delta w t) &= \cos(\overline{w}t)\cos(\Delta w t) - \sin(\overline{w}t)\sin(\Delta w t) \end{aligned}$$

dass



Die Abbildung zeigt die Schwingung für $w_1 = 7$, $w_2 = 5$, d.h. $\overline{w} = 6$, $\Delta w = 1$ und

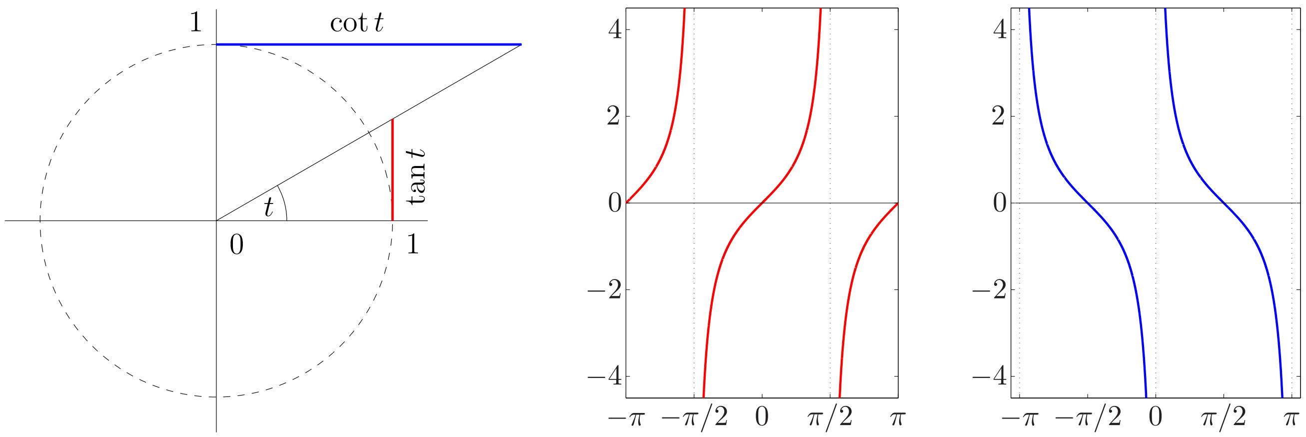
$$u(t) = 2\cos(6t)\cos t\,.$$

2.3.11 Tangens und Kotangens

Die Funktionen Tangens und Kotangens sind durch

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

definiert. Bis auf das Vorzeichen geben sie das Verhältnis der Katheten in einem rechtwinkligen Dreieck an.



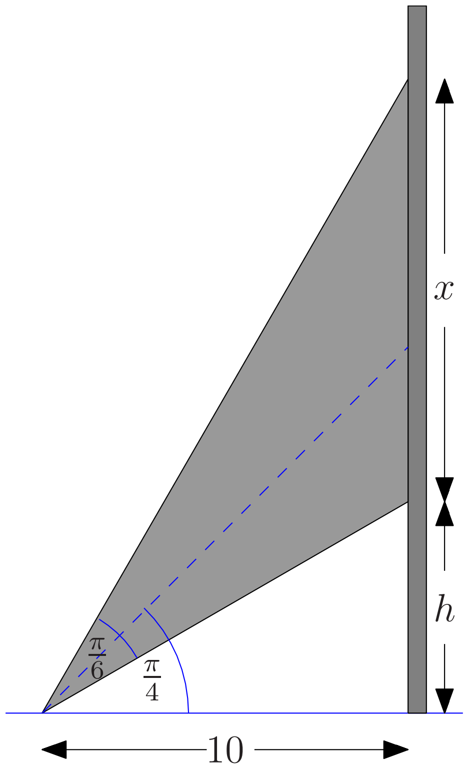
Tangens Kotangens

Einige spezielle Werte sind:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.
cot	nicht def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Beispiel:

Die Abbildung zeigt schematisch einen Lichtkegel, der auf eine vertikale Wand trifft.



Um die maximale Ausdehnung x zu bestimmen, bildet man

$$\begin{aligned} \frac{h}{10} &= \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{x+h}{10} &= \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\,. \end{aligned}$$

Setzt man $h = \frac{10}{3}\sqrt{3}$ in die zweite Gleichung ein, so folgt

$$\frac{x}{10} = \sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3}\,,$$

also $x = \frac{20}{3}\sqrt{3}$.

2.3.12 Exponentialfunktion

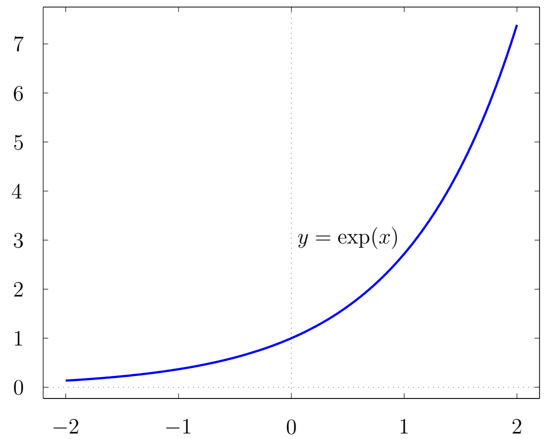
Die Potenzfunktion

$$y = e^x = \exp(x)$$

mit der Eulerschen Zahl $e = 2.71828...$ wird als Exponentialfunktion bezeichnet. Sie ist für alle $x \in \mathbb{R}$ positiv und erfüllt die Funktionalgleichung

$$e^{x+y} = e^x e^y \, .$$

Insbesondere ist $e^{-x} = 1/e^x$.



Beispiel:

Die Exponentialfunktion beschreibt das Wachstum vieler biologischer Prozesse. Beispielsweise ist bei einem einfachen Bevölkerungsmodell die Geburtenzahl proportional zur aktuellen Bevölkerungszahl $p(t)$ zum Zeitpunkt t, d.h.

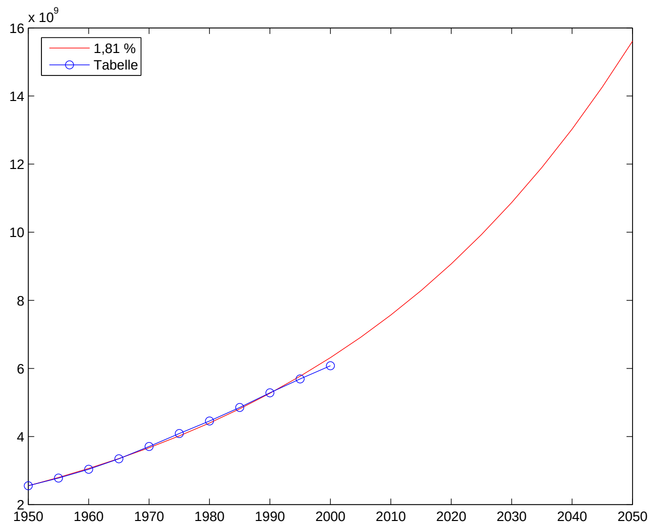
$$p(t + \Delta t) \approx p(t) + \Delta t(\lambda p(t)) \, .$$

Für $\Delta t \to 0$ wird dieses Wachstumsgesetz durch

$$p(t) = ce^{\lambda t} \, , \qquad c = p(0) \, ,$$

modelliert.

Jahr	Bevölkerungszahl in Mio.	Rate
1950	2555	1.76 %
1955	2779	1.87 %
1960	3039	2.02 %
1965	3345	2.16 %
1970	3707	2.05 %
1975	4088	1.80 %
1980	4456	1.79 %
1985	4854	1.77 %
1990	5283	1.54 %
1995	5690	1.37 %
2000	6080	1.25 %



Die Tabelle (links) zeigt die Weltbevölkerung $p(t)$ sowie die jährlichen Zuwachsraten (geschätzte Werte). Die durchschnittliche jährliche Zuwachsrate in den Jahren 1950-2000 betrug 1.81 %. Bei konstantem durchschnittlichem exponentiellem Wachstum ab 1950

$$p(t) = 2555078074e^{0.0181(t-1950)}$$

würde die Weltbevölkerung im Jahr 2050 16 Milliarden zählen (gepunktete Kurve).

2.3.13 Zinseszins

Ein Startkapital x ergibt nach n-facher Aus- bzw. Einzahlung einer Rate r ($r < 0$ bzw. $r > 0$) bei einem Zinsfaktor $(1 + p)$ das Endkapital

$$y = (1+p)^n x + \frac{(1+p)^n - 1}{p} r \,.$$

Dabei entspricht $p = 1$ einem Zinssatz von 100% bei jährlichen Raten.
Der effektive Jahreszins p_j berechnet sich bei monatlicher Verzinsung mit einem Zinsatz p_m zu

$$p_j = (1 + p_m)^{12} - 1 \geq 12 p_m \,.$$

Beweis:

Das Grundkapital wird bereits in der ersten Verzinsungsperiode berücksichtigt, die Ein- bzw. Auszahlungen erst ab der jeweils folgenden. Dies ergibt für

$$\begin{array}{ll} n = 1: & y = x(1+p) + r, \\ n = 2: & y = \big(x(1+p) + r\big)(1+p) + r. \end{array}$$

Allgemein gilt

$$\begin{aligned} y &= \big(\cdots\big(x(1+p)+r\big)(1+p)+r\big)\cdots\big) \\ &= x(1+p)^n + \Big[1 + (1+p) + (1+p)^2 + \cdots + (1+p)^{n-1}\Big] r \end{aligned}$$

Der Ausdruck in eckigen Klammern läßt sich mit der geometrischen Summenformel umwandeln und man erhält die angegebene Formel.

Beispiel:

Ein Darlehen von 100000 Euro soll bei jährlichen Raten und einem Zinssatz von 5 % in einem Zeitraum von 10 Jahren zurückgezahlt werden. Mit

$$y = 0\,,\; n = 10\,,\; p = 0.05\,,\; x = 100000$$

erhält man als Rate

$$\begin{aligned} r &= 1.05^{10} \cdot 100000 \frac{0.05}{1.05^{10} - 1} \\ &= 12950.46 \end{aligned}$$

Bei einer monatlichen Verzinsung mit $\frac{5}{12}\%$ ergibt sich mit

$$n = 120\,,\ p = \frac{1}{240}$$

entsprechend

$$\begin{aligned} r &= \left(\frac{241}{240}\right)^{120} \cdot 100000 \frac{\frac{1}{240}}{(\frac{241}{240})^{120} - 1} \\ &= 1060.66 \end{aligned}$$

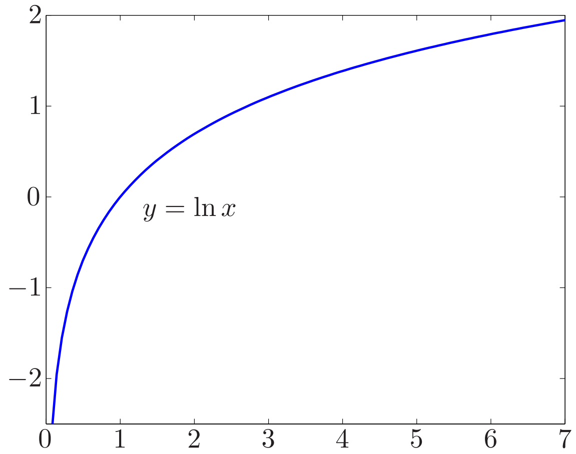
als monatliche Rate, im Jahr also 12727.86. Es entsteht jedoch ein Verlust durch eine mögliche Verzinsung der zu früh gezahlten Beträge. Bei $\frac{4}{12}\%$ wäre dieser gleich

$$\left(\frac{(1+\frac{1}{300})^{12} - 1}{\frac{1}{300}} - 12\right) \cdot 1060.66 = 235.96\,.$$

2.3.14 Logarithmus

Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion:

$$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y.$$



Sie bildet $(0, \infty)$ streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ ab und erfüllt die Funktionalgleichung

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

Insbesondere ist $\ln(1/x) = -\ln x$.

2.3.15 Allgemeine Potenzfunktion und Logarithmus

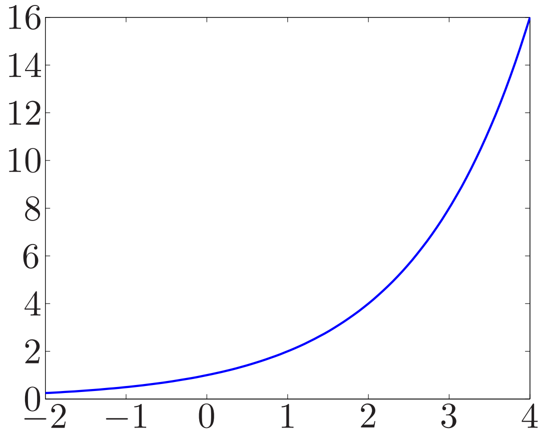
Für $a > 0$ definiert man

$$y = a^x = \exp(x \ln a)$$

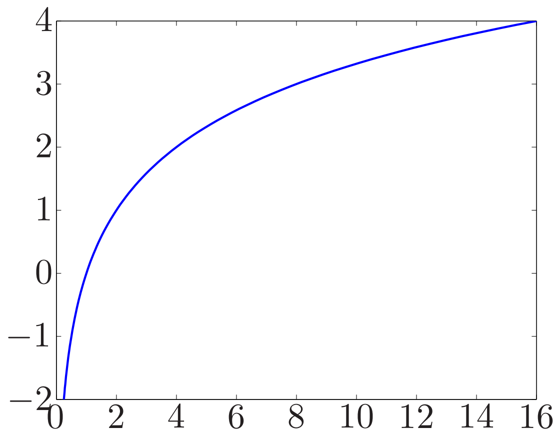
mit der Umkehrfunktion

$$x = \log_a y, \quad y > 0.$$

Insbesondere schreibt man $\log = \log_{10}$ für den Logarithmus zur Basis 10 und $\mathrm{ld} = \log_2$ für den dualen Logarithmus.



$f(x) = 2^x$



$f(x) = \mathrm{ld}(x)$

2.3.16 Rechenregeln für Potenzen und Logarithmen

Aus den Definitionen und Funktionalgleichungen für Exponential- und Logarithmusfunktion folgen

$$\begin{array}{rclrcl} a^{s+t} &=& a^s\,a^t, & \log_a x + \log_a y &=& \log_a(xy), \\ a^{s-t} &=& a^s/a^t, & \log_a x - \log_a y &=& \log_a(x/y), \\ (a^s)^t &=& a^{st} & \log_a x^t &=& t\log_a x\,. \end{array}$$

Darüberhinaus gilt für die Umrechnung zwischen verschiedenen Basen die Beziehung

$$\log_b x = \log_b a\,\log_a x\,.$$

Insbesondere ist

$$\log x = (\log e)\ln x\,.$$

Beispiel:

Die folgenden beiden Beispiele illustrieren die Anwendung der Rechenregeln.

(i) $\ln(4x^2) - 2\ln(2) = \ln(2^2) + \ln(x^2) - 2\ln 2 = 2\ln 2 + 2\ln x - 2\ln 2 = 2\ln x$

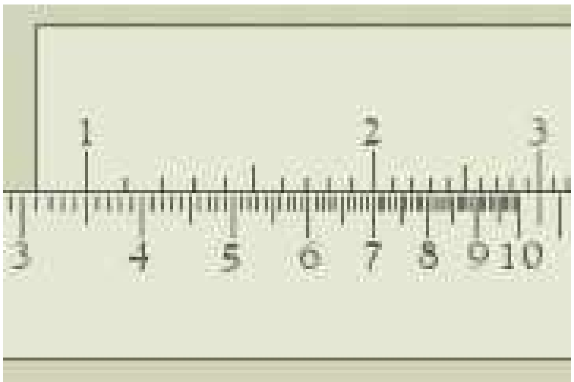
(ii) $\log_4(x^2) + \mathrm{ld}(2x) = 2\frac{\ln x}{\ln 4} + 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + 2\frac{\ln x}{\ln 2}$

2.3.17 Rechenschieber

Der Logarithmus hat die Eigenschaft, dass die Summe der Logarithmen zweier Zahlen gleich dem Logarithmus des Produkts dieser Zahlen ist:

$$\log x + \log y = \log(xy).$$

Somit kann man zwei Lineale mit logarithmischer Skala aneinanderlegen und erhält als Ergebnis nicht die Summe sondern das Produkt dieser Zahlen (Prinzip des Rechenschiebers).



Aus der Abbildung entnimmt man beispielsweise, dass $3.5 \cdot 2 = 7$. Hierzu wird zunächst die 1 der oberen Skala auf die 3.5 (erster Faktor) der unteren Skala ausgerichtet. Anschließend kann unter der 2 der oberen Skala (zweiter Faktor) das Resultat der Multiplikation auf der unteren Skala abgelesen werden.

2.4 Stetigkeit

2.4.1 Stetigkeit

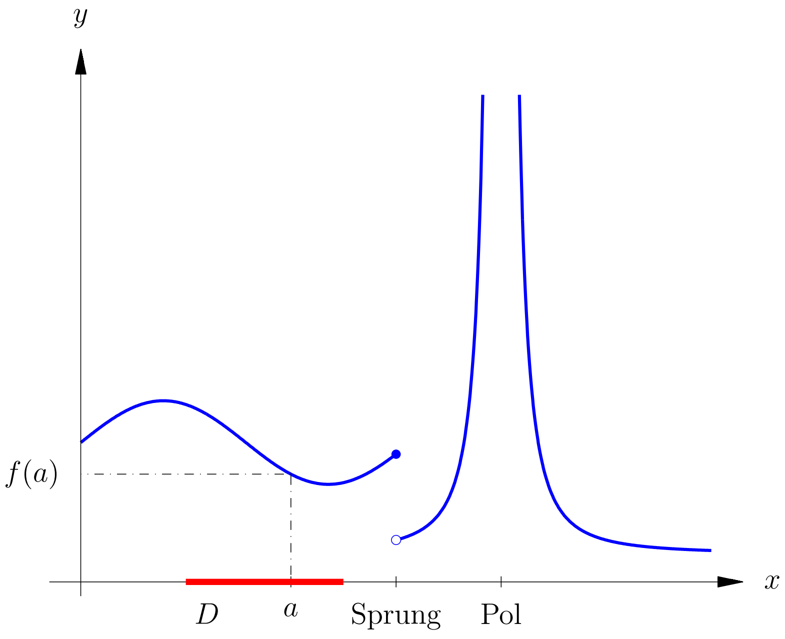
Eine Funktion f ist stetig im Punkt a, wenn für alle Folgen (x_n) mit Grenzwert a die Funktionswerte $f(x_n)$ gegen $f(a)$ konvergieren:

$$x_n \to a \Longrightarrow f(x_n) \to f(a)\,,$$

Nach Definition des Grenzwerts gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein δ_ε mit

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ für } |x - a| < \delta_\varepsilon\,,$$

und man schreibt $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

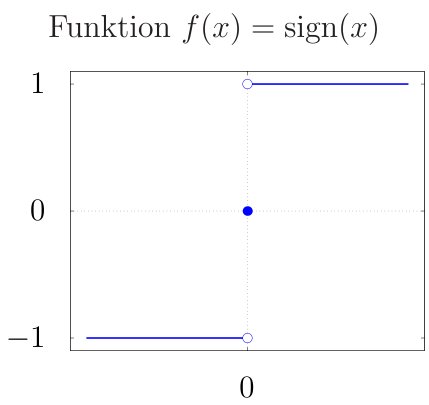


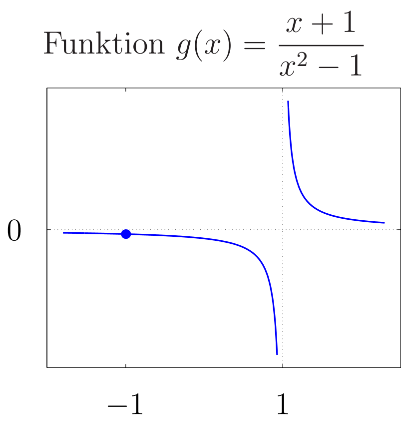
Eine Funktion ist stetig auf einem Intervall D, wenn sie in jedem Punkt von D stetig ist. Dies bedeutet, dass der Graph von f zusammenhängend ist, die Funktion besitzt keine Sprung- oder Polstellen.

Anschaulich bedeutet Stetigkeit, dass sich der Graph ohne abzusetzen zeichnen lässt.

Beispiel:

Die folgenden beiden Beispiele illustrieren verschiedene Typen von Unstetigkeitsstellen.





Die Signum-Funktion sign hat an der Stelle Null einen Sprung. Zwar ist ein Funktionswert definiert, $\text{sign}(0) = 0$, der Grenzwert von $f(x)$ für $x \to 0$ existiert jedoch nicht.

Die Funktion g hat Definitionslücken bei $x = \pm 1$. Für $x \to 1$ strebt $|g(x)|$ gegen ∞, g hat dort eine Polstelle. Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$ existiert jedoch. Dies sieht man unmittelbar durch Kürzen des Linearfaktors $(x+1)$:

$$g(x) = \frac{1}{x-1}\,, \; x \neq -1\,.$$

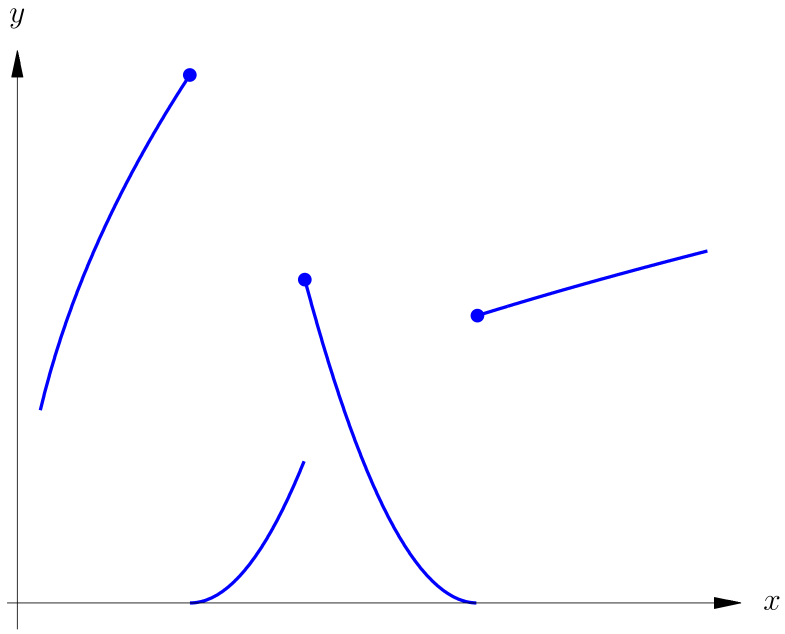
Es handelt sich um eine hebbare Definitionslücke. Durch Ergänzen des Funktionswertes $g(-1) = -\frac{1}{2}$ wird g zu einer auf $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ stetigen Funktion.

2.4.2 Einseitige Stetigkeit

Analog zur Stetigkeit definiert man links- bzw. rechtsseitige Stetigkeit

$$\lim_{x\to a-} f(x) = f^-(a)\,, \qquad \lim_{x\to a+} f(x) = f^+(a),$$

indem man nur Argumente x auf der entsprechenden Seite von a betrachtet.



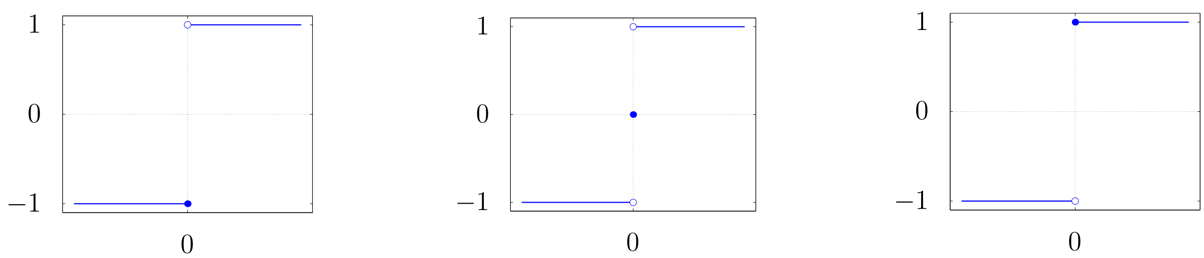
Ist an einer Sprungstelle von f ein Funktionswert definiert, so wird dieser im Allgemeinen durch einen fett gezeichneten Punkt im Graphen hervorgehoben, um anzudeuten, ob er mit dem links- oder rechtsseitigen Grenzwert übereinstimmt.

Beispiel:

Die Funktion

$$f(x) = x/|x|$$

ist in allen Punkten bis auf die Definitionslücke $x = 0$ stetig.



Setzt man $f(0) = -1$ so wird die Funktion linksseitig und mit $f(0) = 1$ rechtsseitig stetig bei 0 fortgesetzt. Für $f(0) = 0$ erhält man die Signum-Funktion

$$f(x) = \mathrm{sign}(x),$$

die bei 0 weder rechts- noch linksseitig stetig ist.

2.4.3 Regeln für stetige Funktionen

Für in einem Punkt a stetige Funktionen f und g sind

$$\begin{aligned} & rf \quad (r \in \mathbb{R}) \\ & f \pm g \\ & fg \\ & f/g \quad (\text{falls } g(a) \neq 0) \\ & f \circ g \end{aligned}$$

in a stetig.
Entsprechendes gilt für auf einem Intervall D stetige Funktion sowie für links- und rechtsseitige Stetigkeitsstellen.

Beweis:

Die Regeln ergeben sich unmittelbar aus den entsprechenden Aussagen für Grenzwerte. Betrachtet man beispielsweise die Komposition stetiger Funktionen, so folgt aus der Stetigkeit von g für jede Folge (x_n) mit Grenzwert a

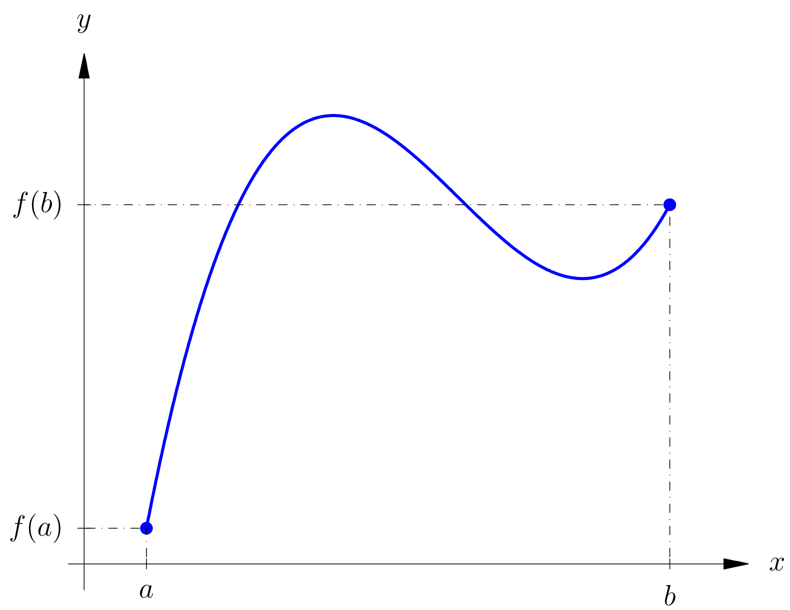
$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(a).$$

Da f ebenfalls stetig ist, folgt

$$\lim_{n\to\infty} f(g(x_n)) = f(g(a)).$$

2.4.4 Zwischenwertsatz

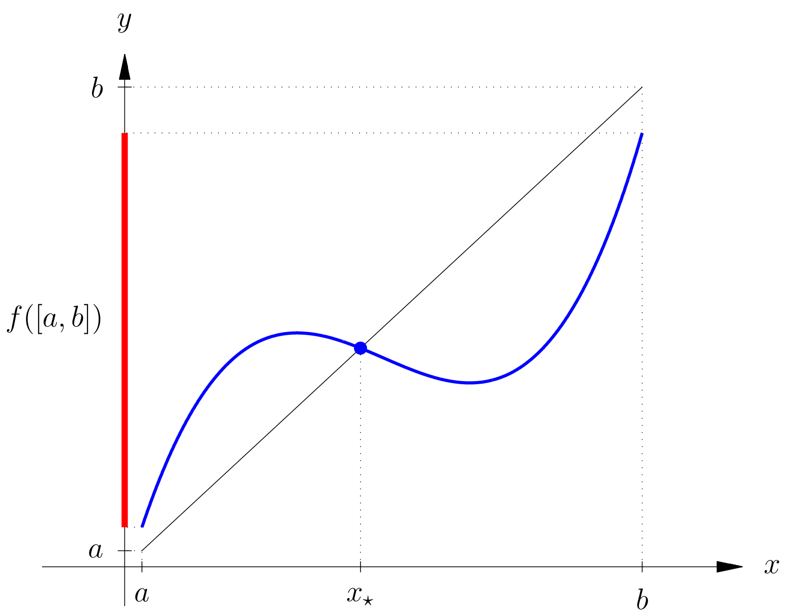
Eine stetige Funktion f nimmt auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.



Beispiel:

Bildet eine Funktion f das Intervall $[a, b]$ stetig in $[a, b]$ ab, so existiert ein $x_\star$ mit

$$x_\star = f(x_\star).$$



Für die stetige Funktion

$$g(x) = f(x) - x$$

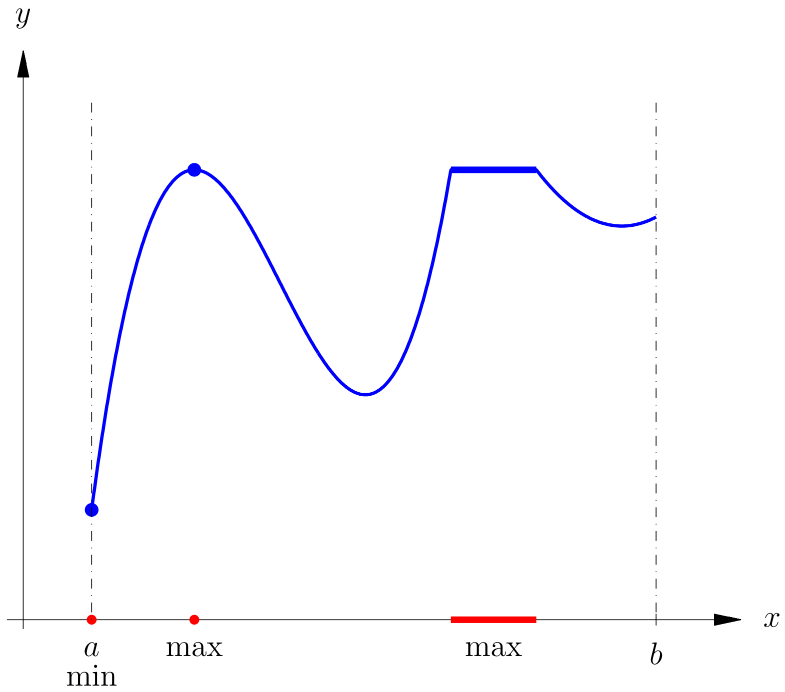
gilt $g(a) \geq 0$ und $g(b) \leq 0$. Mit dem Zwischenwertsatz folgt die Existenz einer Nullstelle $x_\star \in [a, b]$:

$$g(x_\star) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(x_\star) = x_\star$$

d.h. die Existenz eines Fixpunktes $x_\star$ von f.

2.4.5 Satz vom Maximum und Minimum

Eine stetige Funktion hat auf einem endlichen abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ mindestens ein Minimum und Maximum.



Beispiel:

Es gibt ein $c > 0$ mit

$$(x+y)^n \leq c(x^n + y^n)$$

für $x, y \geq 0$.
Zum Beweis setzt man für $x \neq 0$ (der Fall $x = 0$ ist trivial),

$$z = y/x$$

und betrachtet die stetige Funktion

$$f(z) = \frac{(1+z)^n}{1+z^n}.$$

Da $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 1$ ist, existiert ein $b > 0$, so dass $f(z) \leq 2$ für $z \geq b$ gilt. Mit

$$c = \max\left\{2, \max_{z\in[0,b]} f(z)\right\}$$

folgt

$$f(z) = \frac{(1+z)^n}{1+z^n} \leq c$$

und damit obige Behauptung.

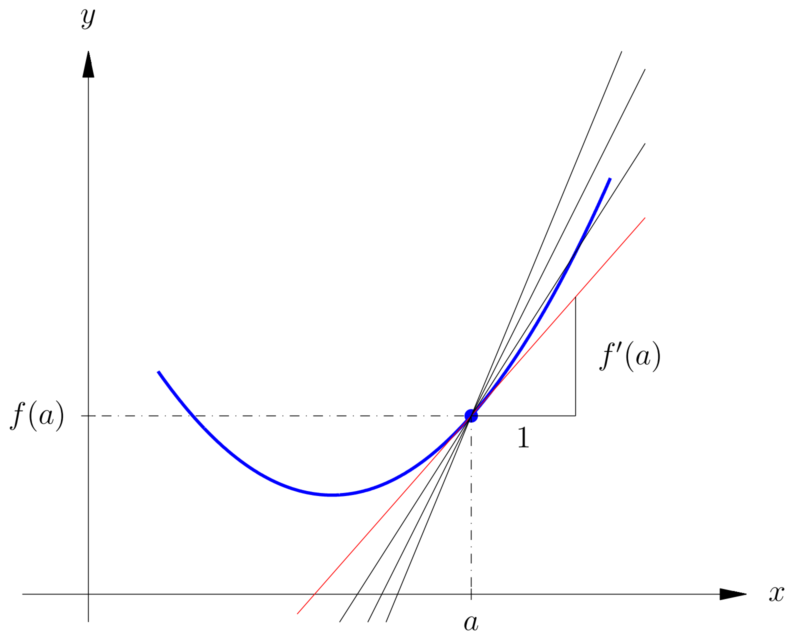
2.5 Differentialrechnung

2.5.1 Ableitung

Eine Funktion f ist in einem Punkt a differenzierbar, wenn der als Ableitung bezeichnete Grenzwert

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existiert.



Geometrisch bedeutet Differenzierbarkeit, dass die Steigungen der Sekanten gegen die Steigung der durch

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

gegebenen Tangente konvergieren.
Man schreibt auch

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{dy}{dx}$$

mit $y = f(x)$. Diese Schreibweise symbolisiert den Grenzübergang $\Delta x \to 0$ in dem Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x}\,.$$

Höhere Ableitungen werden mit $f'', f''', \ldots$ bzw. $f^{(2)}, f^{(3)}, \ldots$ bezeichnet.
Eine Funktion f heißt differenzierbar auf einer Menge D, wenn $f'(x)$ für alle $x \in D$ existiert.

Beispiel:

Für die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2$ erhält man definitionsgemäß:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x\,.$$

Die zweite Ableitung $f''(x) = 2$ ist konstant.
Allgemein folgt für ein beliebiges Monom $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, mit Hilfe der binomischen Formel

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} x^{n-1}h + O(h^2)}{h} = nx^{n-1}\,,$$

wobei $O(h^2)$ Terme der Ordnung h^2 bezeichnet.

Beispiel:

Die Ableitung von $f(x) = \sin x$ läßt sich mit Hilfe des Additionstheorems berechnen. Aus

$$\sin(t \pm h/2) = \sin t \cos(h/2) \pm \cos t \sin(h/2)$$

folgt mit $t = x + h/2$ für den Differenzenquotient

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \frac{\sin\big((x+h/2)+h/2\big) - \sin\big((x+h/2)-h/2\big)}{h} \\ &= \frac{2\cos(x+h/2)\sin(h/2)}{h}\,. \end{aligned}$$

Wegen

$$\lim_{h\to 0} \frac{2\sin(h/2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} = 1$$

strebt die rechte Seite für $h \to 0$ gegen $\cos x$.

2.5.2 Wichtige Ableitungen

Die folgende Tabelle enthält die Ableitungen der wichtigsten Grundfunktionen:

$f(x)$	$f'(x)$		$f(x)$	$f'(x)$
c	0		$x^r,\ r \neq 0$	rx^{r-1}
e^x	e^x		$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$		$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$		$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\tan^2 x + 1$		$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$		$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

2.5.3 Linearität der Ableitung

Die Ableitung ist linear, d.h. für differenzierbare Funktionen f und g gilt

$$\begin{aligned} (rf)' &= rf'\,, \quad r \in \mathbb{R}\,, \\ (f \pm g)' &= f' \pm g'\,. \end{aligned}$$

2.5.4 Produktregel

Die Ableitung des Produktes zweier differenzierbarer Funktionen f und g ist

$$(fg)' = f'g + fg'\,.$$

Allgemeiner gilt für ein Produkt $f = f_1 \cdots f_n$

$$f' = \sum_{i=1}^{n} f_i' \frac{f}{f_i} \,.$$

Beispiel:

Mit der Produktregel folgt

$$\frac{d}{dx}(x^2 \ln x) = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = x(2\ln x + 1)\,.$$

Fügt man $\sin x$ als Faktor hinzu, so ergibt eine nochmalige Anwendung der Produktregel

$$\frac{d}{dx}\left[\sin x(x^2 \ln x)\right] = \cos x(x^2 \ln x) + \sin x(x(2\ln x + 1))\,.$$

Alternativ kann man die Formel für ein mehrfaches Produkt verwenden und erhält

$$\frac{d}{dx}\left[\sin x(x^2 \ln x)\right] = \cos x(x^2 \ln x) + 2x(\sin x \ln x) + \frac{1}{x}(\sin x\, x^2)\,.$$

2.5.5 Quotientenregel

Die Ableitung des Quotienten zweier differenzierbaren Funktionen ist

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

an allen Punkten x mit $g(x) \neq 0$. Insbesondere gilt

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}\,.$$

Beispiel:

Die Ableitung der rationalen Funktion

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1-2x}{4+3x^2}$$

ist

$$\begin{aligned} \frac{(1-2x)'(4+3x^2) - (1-2x)(4+3x^2)'}{(4+3x^2)^2} &= \frac{-2(4+3x^2) - (1-2x)(6x)}{(4+3x^2)^2} \\ &= \frac{6x^2 - 6x - 8}{(4+3x^2)^2} \end{aligned}$$

Alternativ erhält man mit der Produktregel

$$\left((1-2x)\frac{1}{4+3x^2}\right)' = (-2)\frac{1}{4+3x^2} + (1-2x)\frac{-6x}{(4+3x^2)^2} = \frac{6x^2-6x-8}{(4+3x^2)^2}\,.$$

2.5.6 Kettenregel

Für die Verkettung von Funktionen

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

ist die Ableitung

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)\,.$$

Mit $f(y) = z,\; g(x) = y,\; h(x) = z$ schreibt man auch

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}\,.$$

Beispiel:

Zur Illustration der Kettenregel wird

$$h(x) = \sin\big(\underbrace{\ln(1+x^2)}_{y=g(x)}\big)$$

differenziert:

$$h'(x) = \frac{d}{dy}\sin(y)g'(x) = \cos\big(\ln(1+x^2)\big)g'(x)\,.$$

Die Berechnung der inneren Ableitung $g'(x)$ erfolgt erneut mit der Kettenregel:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}(2x)\,.$$

Alternativ kann man die differentielle Schreibweise verwenden. Mit $z = \sin y, y = \ln w, w = 1+x^2$ ist

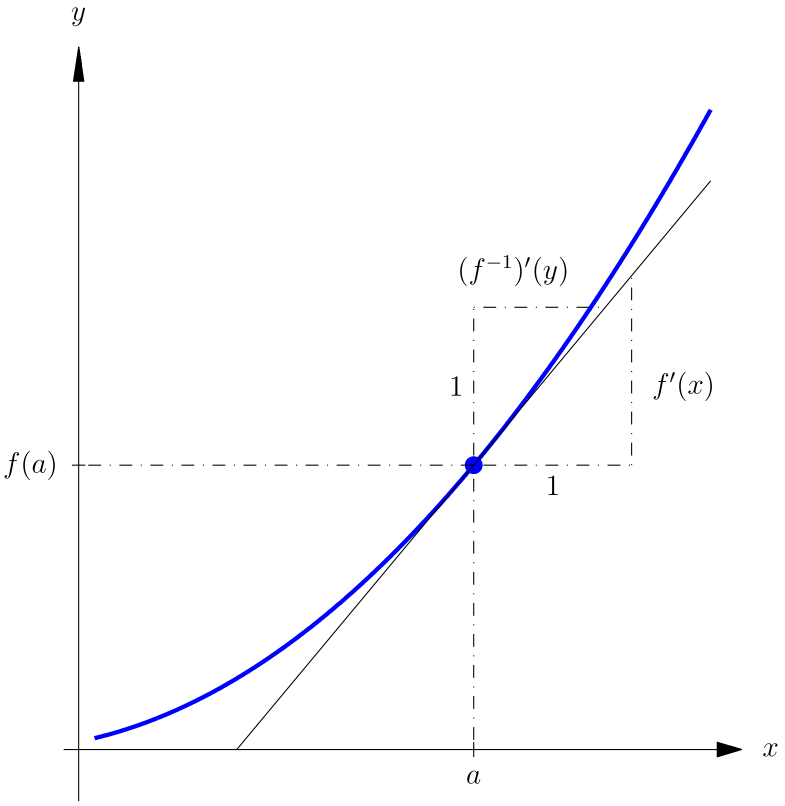
$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx} = \cos(y)\frac{1}{w}2x = \cos\big(\ln(1+x^2)\big)\frac{1}{1+x^2}(2x)\,.$$

2.5.7 Ableitung der Umkehrfunktion

Ist eine Funktion $y = f(x)$ stetig differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$, so ist f in einer Umgebung von x invertierbar, und es gilt

$$(f^{-1})'(y) = f'(x)^{-1},$$

bzw. $dx/dy = (dy/dx)^{-1}$.



Wie in der Abbildung veranschaulicht, sind die Steigungen von f und f^{-1} reziprok.

Beweis:

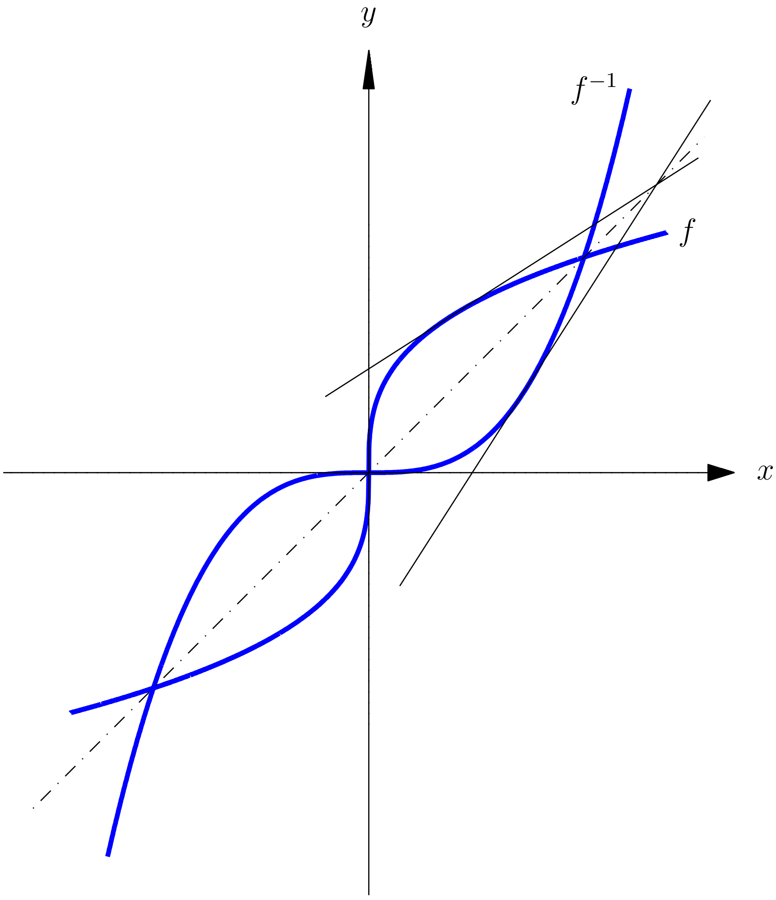
Setzt man $g = f^{-1}$, so erhält man

$$x = g(f(x))$$

und nach Differentiation mit der Kettenregel

$$1 = g'(f(x))f'(x)\,.$$

Mit $y = f(x)$ folgt die Behauptung.



Daß die Steigungen von f und f^{-1} an ensprechenden Stellen x und y reziprok zueinander sind, wird auch klar, wenn man berücksichtigt, dass f und f^{-1} symmetrisch zur ersten Winkelhalbierenden sind.

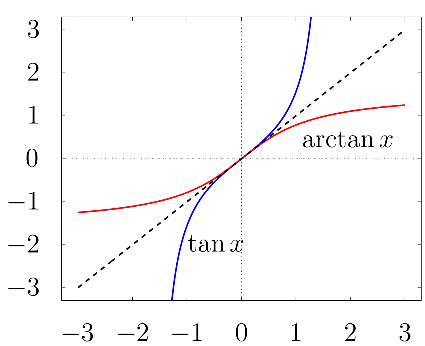
Beispiel:

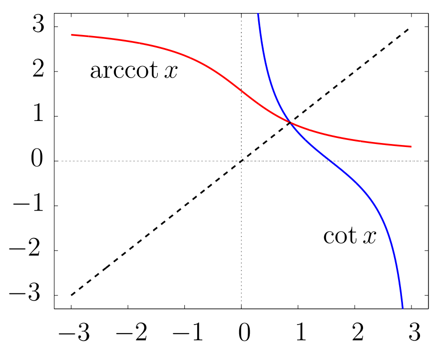
Um die Ableitung der Umkehrfunktion $x = \arctan y$ der Tangensfunktion zu bestimmen, berechnet man zunächst

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Damit folgt

$$\frac{d}{dy}\arctan y = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{-1} = \cos^2 x.$$





Die rechte Seite muss nun als Funktion von y geschrieben werden. Dazu verwendet man die Identität

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + y^2$$

und erhält

$$\frac{d}{dy} \arctan y = \frac{1}{1+y^2}.$$

Analog zeigt man für die Umkehrfunktion des Kotangens,

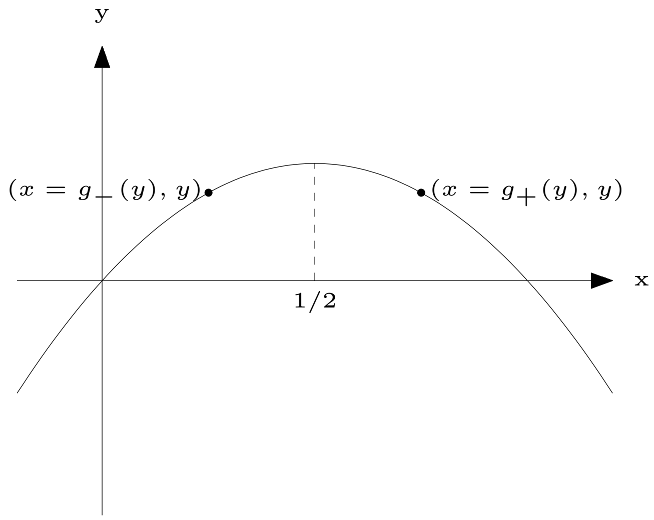
$$\frac{d}{dy} \operatorname{arccot} y = -\frac{1}{1+y^2}.$$

Beispiel:

Die Funktion

$$y = f(x) = x\,(1-x)$$

besitzt auf den Intervallen $(-\infty, 1/2]$ und $[1/2, \infty)$ jeweils eine Umkehrfunktion $x = g(y)$.



In beiden Fällen gilt

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1-2x}\,.$$

Nochmaliges Differenzieren ergibt

$$g''(y) = \left(\frac{1}{1-2x}\right)' \frac{dx}{dy} = \frac{2}{(1-2x)^2} \frac{1}{1-2x}\,.$$

Speziell erhält man für $x = 1, y = 0$

$$g'(0) = 1, \quad g''(0) = -2\,.$$

Die Ableitungen sind also berechenbar, ohne dass die Umkehrfunktion explizit gebildet werden muss. Dies ist nur dann möglich, wenn man $g'(y)$ als Funktion von y schreiben kann. In diesem Beispiel ist das möglich, denn x lässt sich als Funktion von y schreiben:

$$g_\pm(y) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{1/4 - y}\,.$$

Die obigen Werte können so überprüft werden, wobei der dem Wertepaar $(1, 0)$ entsprechende Zweig gewählt werden muss.

2.5.8 Implizites Differenzieren

Ist eine Funktion $y = f(x)$ implizit, d.h. durch eine Gleichung in x und y gegeben, so kann man beide Seiten dieser Gleichung unmittelbar nach x differenzieren. Dabei ist lediglich bei den Ausdrücken in $y = y(x)$ die Kettenregel anzuwenden.
Beispielsweise erhält man für die durch

$$E: \ x^2 + 3y^2 = 7$$

gegebene Ellipse

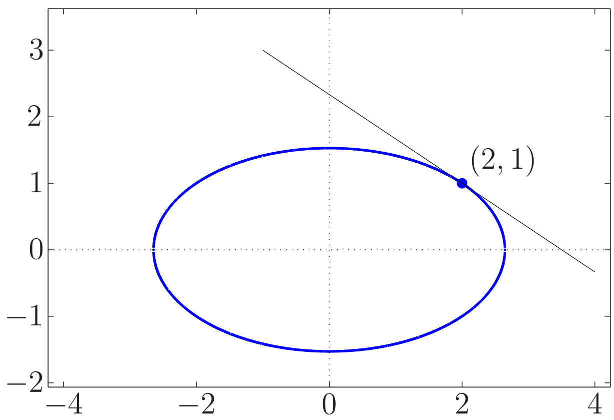
$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + 3y^2\right) = 2x + 6yy' = \frac{d}{dx}7 = 0$$

bzw.

$$y' = -\frac{1}{3}\frac{x}{y}\,.$$

Damit kann die Steigung der Tangente in einem Punkt auf E mit $y \neq 0$ bestimmt werden. Beispielsweise erhält man für $(2, 1)$

$$y' = -\frac{1}{3}\frac{2}{1} = -\frac{2}{3}\,.$$



Analog berechnen sich höhere Ableitungen. Unter Verwendung der Produktregel für yy' ist

$$\frac{d}{dx}(2x + 6yy') = 2 + 6(y')^2 + 6yy'' = 0\,.$$

Hieraus folgt

$$y'' = -\frac{1 + 3(y')^2}{3y}\,.$$

Wiederum kann man durch Einsetzen der Koordinaten eines Punktes auf E und des bereits bestimmten Wertes von $y'(x)$ konkrete Werte bestimmen.

2.5.9 Logarithmische Ableitung

Die Formel

$$f'(x) = f(x)\frac{d}{dx}\ln|f(x)|$$

kann zur Differentiation von Funktionen der Form $y = g(x)^{h(x)}$ mit $g(x) > 0$ benutzt werden. Man erhält

$$\frac{dy}{dx} = g(x)^{h(x)}\frac{d}{dx}\big(h(x)\ln g(x)\big)\,.$$

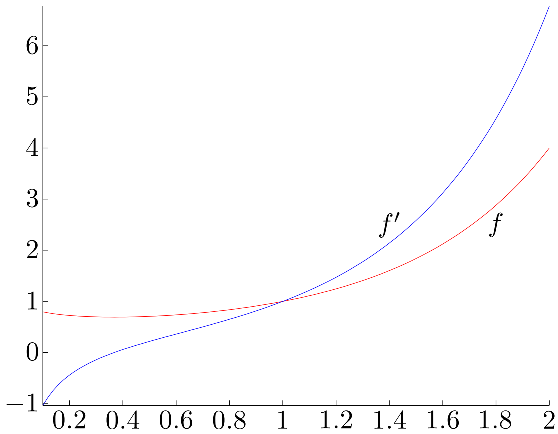
Beispiel:

Für die Funktion

$$f(x) = x^x$$

mit $x > 0$ ist die Ableitung

$$f'(x) = x^x \frac{d}{dx} \ln(x^x) = x^x \frac{d}{dx} (x \ln x) = x^x (\ln x + 1)\,.$$

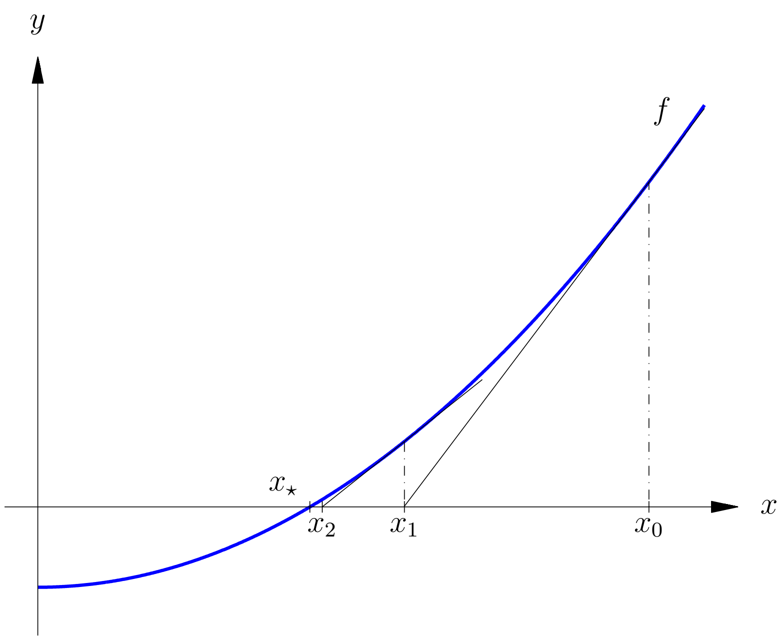


Für $x \to 0$ strebt $\ln f(x) = x \ln x$ gegen 0, also x^x gegen $e^0 = 1$. Die Funktion ist also bei Null rechtsseitig stetig. Für die Ableitung ist dies nicht der Fall. Wegen $x^x \to 1$ und $\ln x + 1 \to -\infty$ für $x \to 0$ hat f eine senkrechte Tangente bei Null.

2.5.10 Newton-Verfahren

Mit dem Newton-Verfahren kann eine Nullstelle x_* einer Funktion f numerisch bestimmt werden. Die Folge $x_0, x_1 \ldots$ der Approximationen wird durch Linearisierung gewonnen. Die Näherung $x_{\ell+1}$ ist der Schnittpunkt der Tangente im Punkt $(x_\ell, f(x_\ell))$ mit der x-Achse:

$$x_{\ell+1} = x_\ell - f(x_\ell)/f'(x_\ell)$$



Für eine einfache Nullstelle x_* ($f'(x_*) \neq 0$) konvergiert die Newton-Iteration lokal quadratisch, d.h.

$$|x_{\ell+1} - x_*| \leq c\ |x_\ell - x_*|^2$$

für Startpunkte x_0 in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_*.

(Online-Version enthält Download, siehe Anhang A)

2.5.11 Babylonisches Wurzelziehen

Die schon von den Babyloniern verwendete Iteration

$$x \longleftarrow (x + a/x)/2$$

zur Berechnung der Wurzel einer positiven Zahl a stellt sich bei genauerer Betrachtung als das Newton-Verfahren für $f(x) = x^2 - a$ heraus:

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) = x - \frac{x^2 - a}{2x}$$

Für $a = 2, x_0 = 1$ erhält man die Approximationen

$$\begin{array}{l}
\underline{1} \\
\underline{1}.5 \\
\underline{1.41}6666666666666666666666666666666667 \\
\underline{1.41421}56862745098039215686274509803921 57 \\
\underline{1.41421356237}46899106262955788901349101 17 \\
\underline{1.414213562373095048801689}6235025302436 15 \\
\underline{1.4142135623730950488016887242096980785 70}
\end{array}$$

Die Konvergenz ist äußerst schnell. Bei jedem Schritt verdoppelt sich die Anzahl der korrekten Stellen (unterstrichen) annähernd. Die quadratische Konvergenz läßt sich in diesem Beispiel auch durch einfache Umformung nachweisen:

$$x_{\ell+1} - \sqrt{a} = (x_\ell + a/x_\ell)/2 - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_\ell}\,(x_\ell - \sqrt{a}\,)^2.$$

Aus der geometrischen Interpretation des Newton-Verfahrens folgt, dass die Iteration für alle $x_0 \neq 0$ konvergent ist.

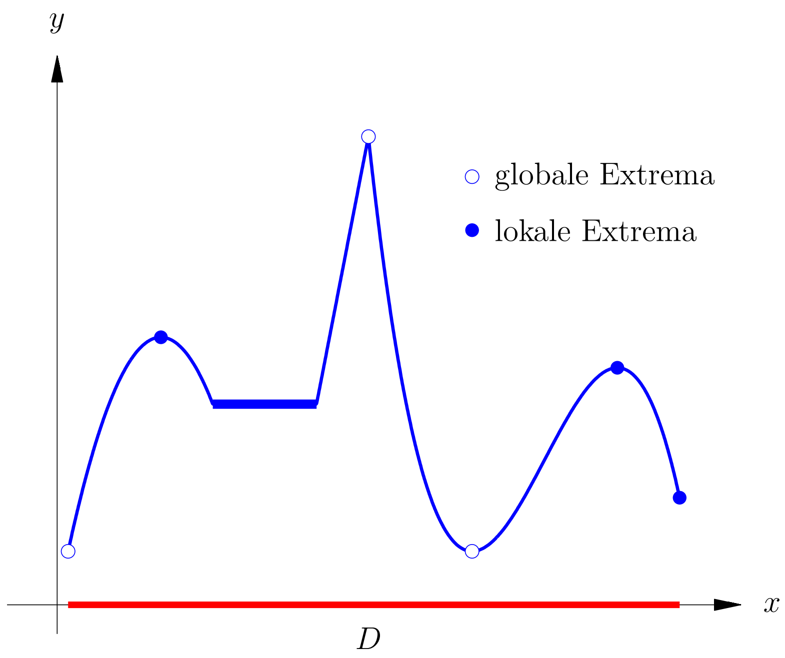
2.6 Extremwerte und Kurvendiskussion

2.6.1 Extrema

Eine Funktion f hat in a ein globales Minimum auf einer Menge D, wenn

$$f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in D.$$

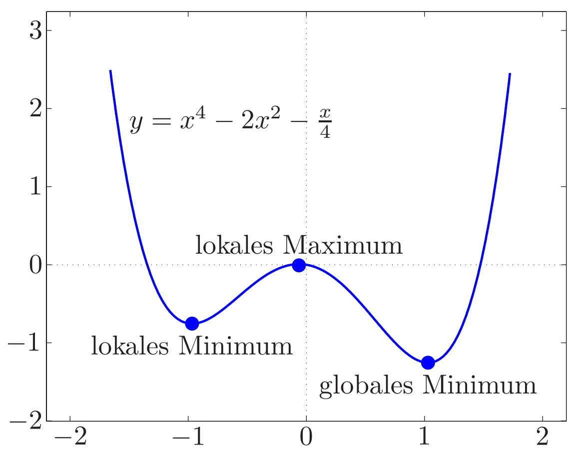
Bei einem lokalen Minimum ist der Funktionswert $f(a)$ nur in einer hinreichend kleinen Umgebung $(a - \delta, a + \delta) \cap D$ minimal.
Globales und lokales Maximum sind analog definiert.

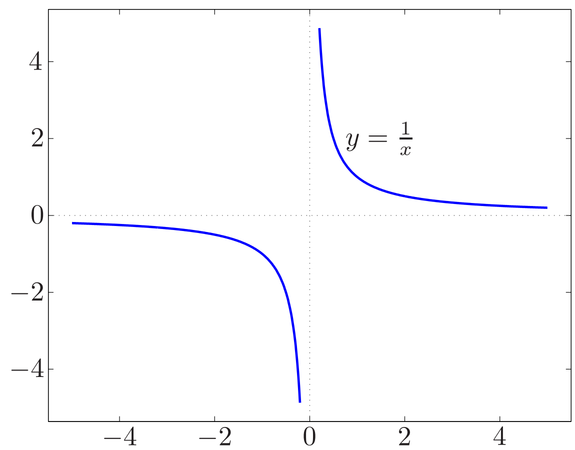


Für eine stückweise stetig differenzierbare Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall können Extremwerte nur an den Nullstellen der Ableitung, Unstetigkeitsstellen oder Randpunkten auftreten. Der Typ kann mit Hilfe höherer Ableitungen und durch Vergleichen der Funktionswerte ermittelt werden.

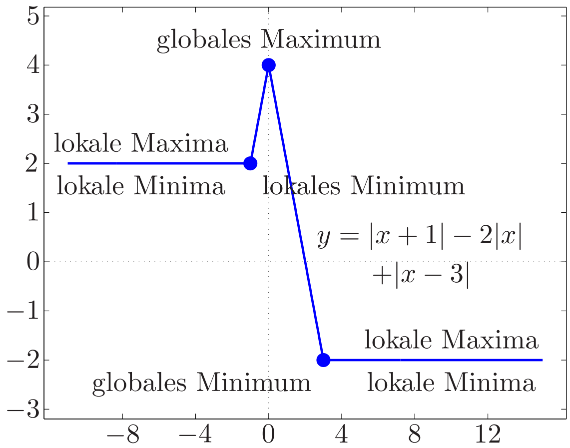
Beispiel:

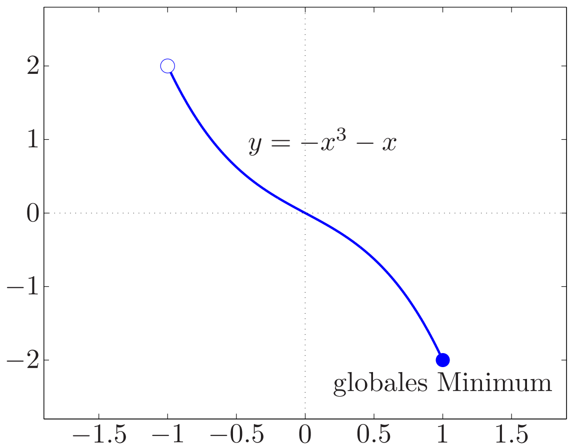
Im Folgenden werden einige typische Fälle diskutiert.
Die Funktion $f(x) = x^4 - 2x^2 - x/4$ mit $D = \mathbb{R}$ besitzt zwei Minima und ein Maximum. Das Minimum mit dem kleineren Funktionswert ist das globale. Ein globales Maximum existiert nicht, da $f(x) \to \infty$ für $x \to \pm\infty$.
Die Funktion $f(x) = 1/x$ mit $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ besitzt keine Extremwerte.





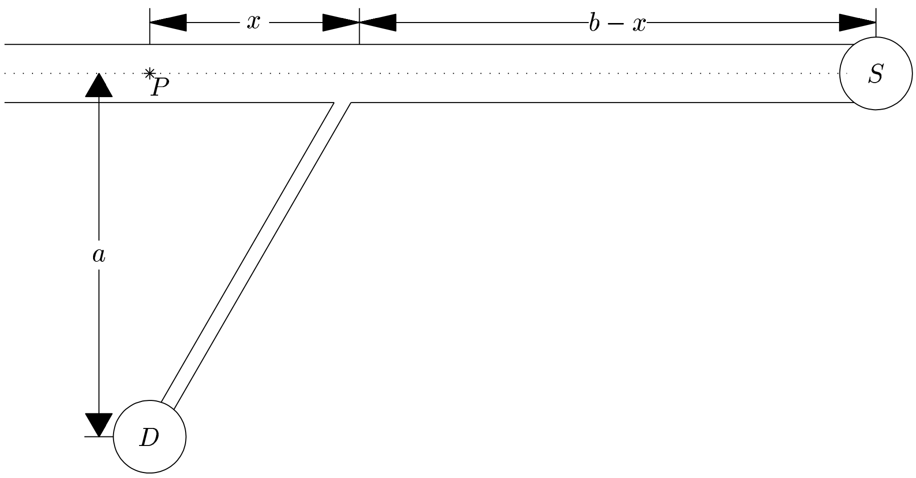
Ist eine Funktion auf einem offenen Intervall konstant, so sind diese Stellen sowohl (lokale) Maxima als auch (lokale) Minima.
Bei einer strikt monotonen Funktion werden die Extremwerte an den Randpunkten angenommen, falls diese zum Definitionsgebiet gehören.





Beispiel:

Von einem Dorf D soll eine Verbindungsstraße zu einer Stadt S gebaut werden. Im Abstand a zum Dorf führt bereits eine Autobahn zur Stadt. Der Weg von der Stadt bis zu dem Punkt P, der Autobahn der dem Dorf am nächsten liegt, hat die Länge b.
Die geradlinige Strecke soll so gebaut werden, dass ein möglichst schnelles Erreichen der Stadt gewährleistet ist, wenn von einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $v_a = 120\text{km/h}$ auf der Autobahn und $v_n = 60\text{km/h}$ auf der neuen Nebenstrecke ausgegangen wird.



Zu bestimmen ist die Entfernung $x \geq 0$ zwischen P und dem Übergang der Nebenstrecke auf die Autobahn durch Minimierung der benötigten Zeit

$$t(x) = \sqrt{a^2 + x^2}/v_n + (b-x)/v_a$$

für die Fahrt in die Stadt.
Nullsetzen der Ableitung

$$t'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}v_n} - \frac{1}{v_a} \stackrel{!}{=} 0\,,$$

ergibt

$$v_a x = v_n \sqrt{a^2+x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x_m = a/\sqrt{3}$$

als mögliche lokale Extremstelle in (0, b). Ob es sich um das Minimum handelt, muss durch Vergleich mit den Fahrzeiten für die Intervallendpunkte geprüft werden:

$$t(a/\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}a+b}{v_a}, \qquad t(0) = \frac{2a+b}{v_a}, \qquad t(b) = \frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{v_a}$$

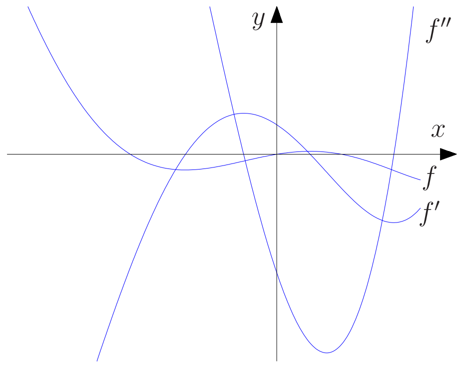
Offensichtlich ist $t(0) \geq t(x_m)$. Für den rechten Endpunkt gilt

$$\begin{aligned} t(b) \geq t(x_m) \quad &\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{a^2+b^2} \geq \sqrt{3}a+b \\ &\Leftrightarrow \quad 4a^2+4b^2 \geq 3a^2+2\sqrt{3}ab+b^2 \\ &\Leftrightarrow \quad a^2-2\sqrt{3}ab+3b^2 = (a-\sqrt{3}b)^2 \geq 0\,. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist stets erfüllt, und somit ist x_m optimal, falls x_m im relevanten Intervall $(0, b)$ liegt: $b \geq a/\sqrt{3}$. Andernfalls wird das Minimum am Randpunkt b, also bei der direkten Verbindung zur Stadt, erreicht.

2.6.2 Extremwerttest

Der Typ eines Extremwerts lässt sich mit Hilfe höherer Ableitungen entscheiden.



Ist f zweimal stetig differenzierbar und

$$f'(a) = 0\,, \qquad f''(a) > 0 \qquad (f''(a) < 0)\,,$$

so hat f ein lokales Minimum (Maximum) bei a. Verschwindet die zweite Ableitung an der Stelle a, so müssen höhere Ableitungen zur Entscheidung herangezogen werden. Gilt

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(a) \neq 0\,,$$

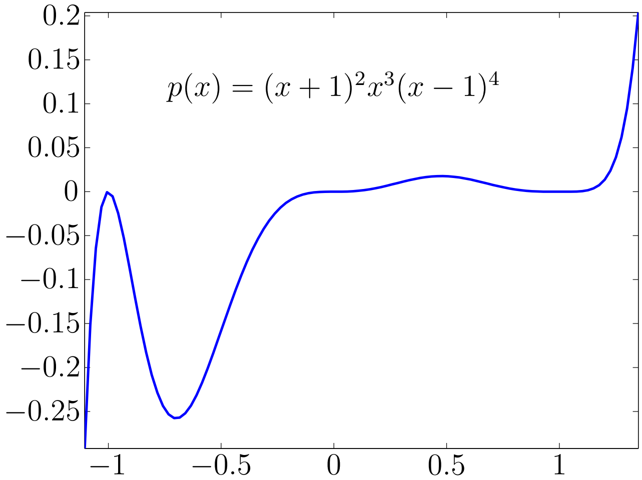
so hat f in a genau dann eine Extremstelle, wenn n gerade ist. In diesem Fall hat f in a ein lokales Maximum bzw. Minimum, wenn $f^{(n)}(a) < 0$ bzw. $f^{(n)}(a) > 0$ ist.

Beispiel:

Das Polynom

$$p(x) = (x+1)^2x^3(x-1)^4$$

hat bei $x = -1$ eine doppelte, bei $x = 0$ eine dreifache und bei $x = 1$ eine vierfache Nullstelle.



Es gilt

$$p(-1) = p'(-1) = 0, \quad p''(-1) = 2(-1)^3(-2)^4 < 0\,.$$

Bei $x = -1$ hat p also ein Maximum. Bei $x = 1$ hat p ein Minimum, denn

$$p(1) = \ldots = p'''(1) = 0, \quad p^{(4)}(1) = 2^2 1^3 4! > 0\,.$$

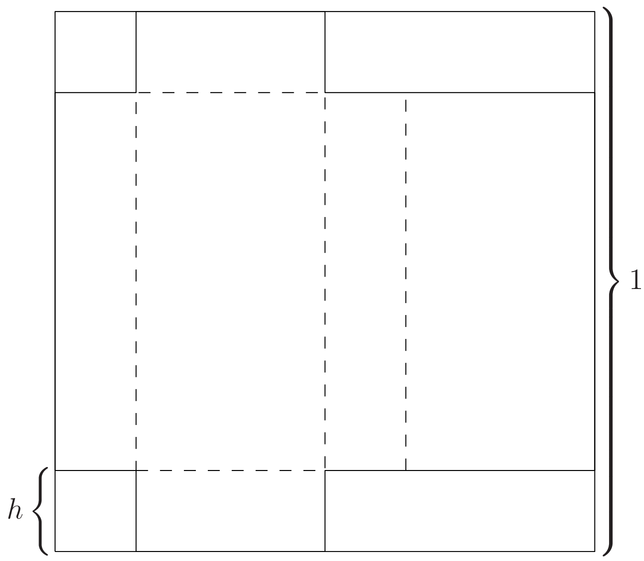
Schließlich besitzt p wegen

$$p(0) = p'(0) = p''(0) = 0, \quad p'''(0) = 3!(-1)^4 \neq 0$$

und einem Vorzeichenwechsel bei $x = 0$ keine Extremstelle im Ursprung.

2.6.3 Schachtel

Mit Hilfe des angegebenen Schnittmusters soll eine Schachtel möglichst großen Volumens aus einem quadratischen Stück Pappe hergestellt werden.



Das Volumen ist

$$v(h) = \underbrace{(1-2h)/2}_{\text{Länge}} \cdot \underbrace{(1-2h)}_{\text{Breite}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Höhe}} = 2h^3 - 2h^2 + \frac{1}{2}h$$

Nullsetzen der Ableitung

$$v'(h) = 6h^2 - 4h + \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 0$$

ergibt

$$h = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{12}} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{6}$$

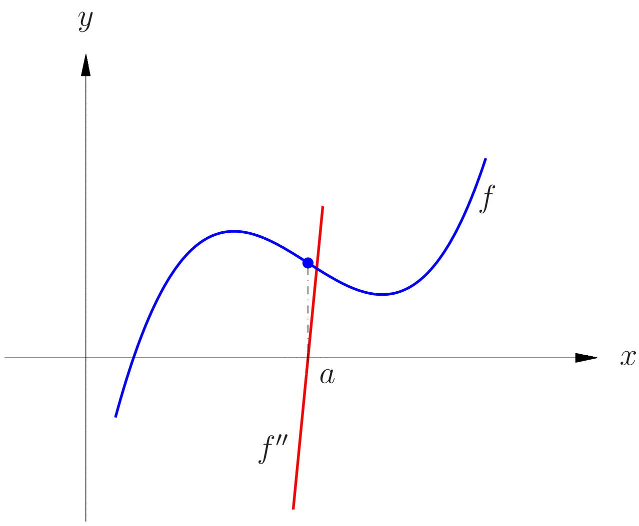
als mögliche lokale Extremstellen. Nur $h = \frac{1}{6}$ ist geometrisch sinnvoll und

$$v\,(1/6) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{27}\,.$$

Da für die Randpunkte $h = 0$ und $h = 1/2$ das Volumen 0 ist, hat die Schachtel für $h = 1/6$ das maximale Volumen.

2.6.4 Wendepunkte

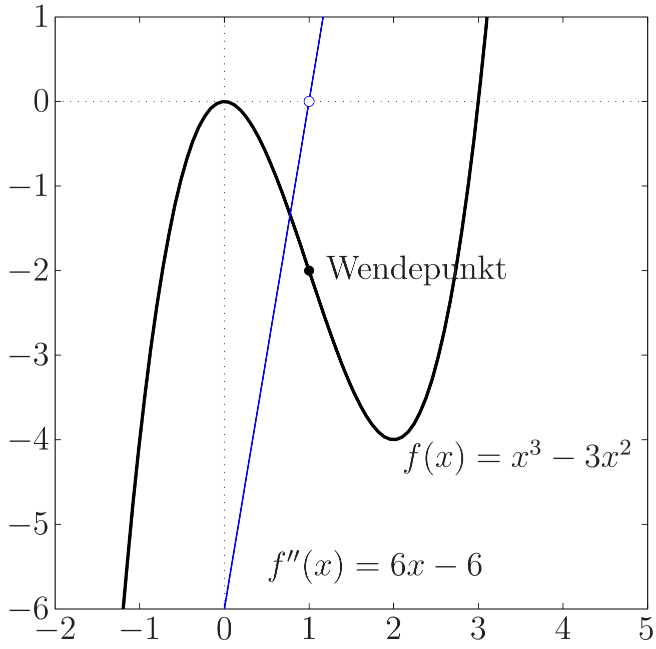
An einem Wendepunkt a einer Funktion f wechselt die zweite Ableitung das Vorzeichen.



Für eine hinreichend glatte Funktion ist notwendig, dass $f''(a) = 0$ und hinreichend, dass $f'''(a) \neq 0$.

Beispiel:

Die Abbildung zeigt ein kubisches Polynom.

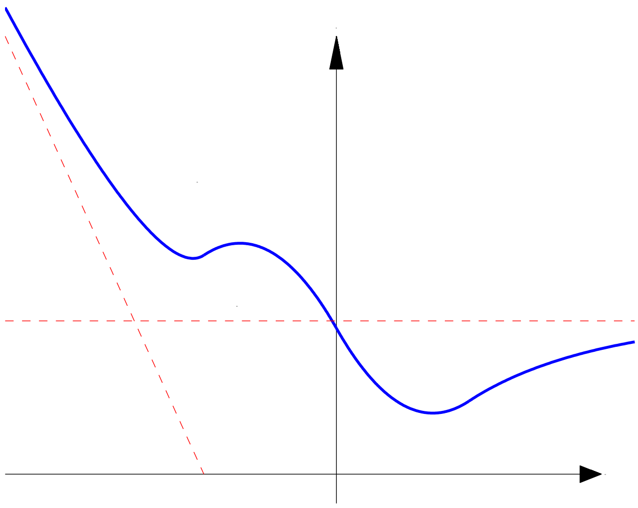


Da die zweite Ableitung linear ist, existiert immer genau ein Wendepunkt.

2.6.5 Asymptoten

Eine lineare Funktion $p(x) = ax + b$ ist eine Asymptote von f, wenn

$$f(x) - p(x) \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \infty \text{ oder } x \to -\infty\,.$$



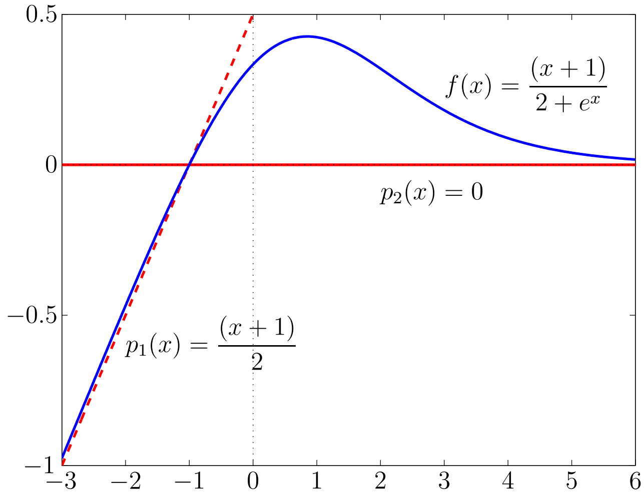
Wie in der Abbildung illustriert, beschreibt eine Asymptote das Verhalten der Funktion f für große x.

Beispiel:

Um die Asymptoten der Funktion

$$f(x) = \frac{x+1}{2+e^x}$$

zu bestimmen werden die Grenzwerte $x \to \pm\infty$ separat betrachtet.



Für $x \to \infty$ ist

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)\cdot e^{-x}}{2\cdot e^{-x}+1}\\ &= \frac{0}{0+1} = 0\,.\end{aligned}$$

Damit ist die x-Achse Asymptote.
Für $x \to -\infty$ strebt e^x gegen 0 und

$$p(x) = \frac{x+1}{2}$$

ist Asymptote.

2.6.6 Asymptoten rationaler Funktionen

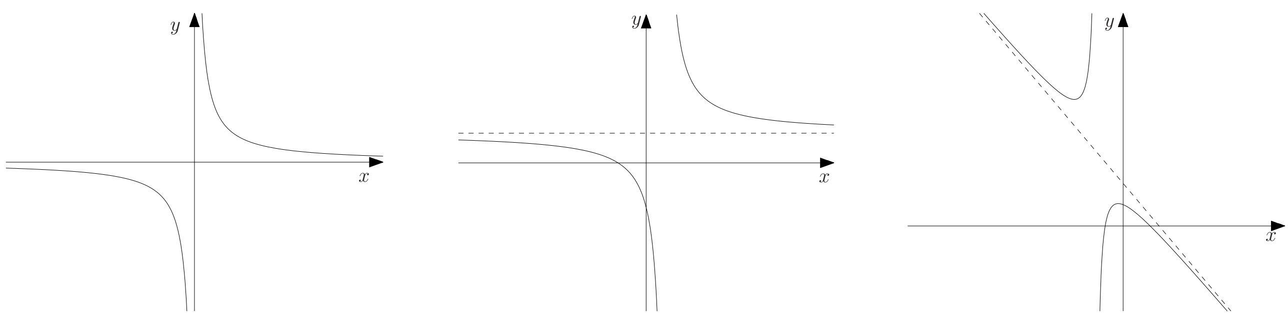
Eine rationale Funktion

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

hat genau dann eine lineare Asymptote, wenn Grad $p \leq$ Grad $q+1$.
Für Grad $p <$ Grad q gilt

$$\lim_{p\to\pm\infty} r(x) = 0\,,$$

d.h. die x-Achse ist Asymptote.



Für Grad $q \leq$ Grad $p \leq$ Grad $q+1$ erhält man die lineare Asymptote mit Polynomdivision:

$$r(x) = ax + b + \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)}$$

mit Grad $\tilde{p} <$ Grad q . Die Asymptote ist waagrecht ($a = 0$), falls Grad $p =$ Grad q. Ist der Zählergrad um mehr als eins größer als der Nennergrad, so wird $r(x)$ für große x durch ein Polynom vom Grad ≥ 2 approximiert.

Beispiel:

Für die rationalen Funktionen

$$r_1 = \frac{4x+3}{2x+1} \qquad \text{und} \qquad r_2 = \frac{2x^2}{x+1}$$

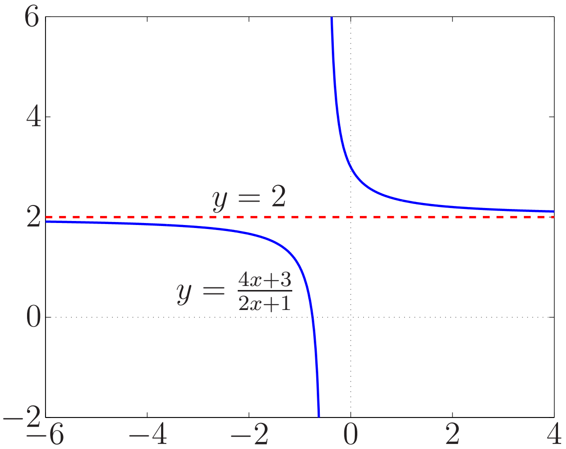
erhält man durch Polynomdivision

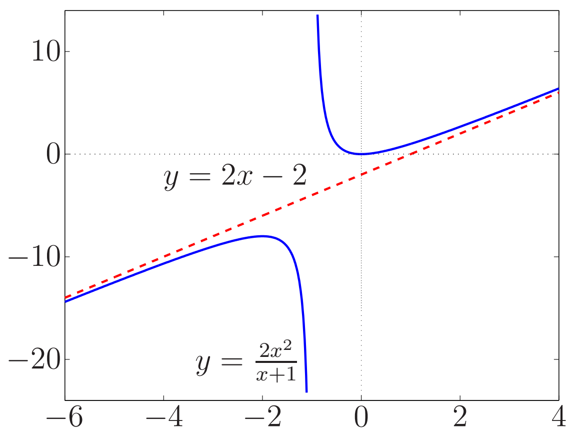
$$r_1(x) = 0x + 2 + \frac{1}{2x+1} \qquad \text{und} \qquad r_2(x) = 2x - 2 + \frac{2}{x+1}$$

die Asymptoten

$$y_1 = 2 \qquad \text{und} \qquad y_2 = 2x - 2\,.$$

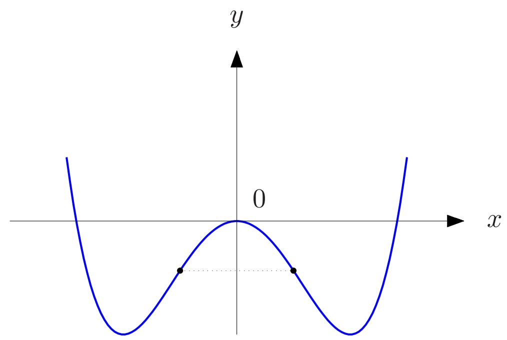
Diese zwei Beispiele sind in den folgenden Abbildungen gezeigt.



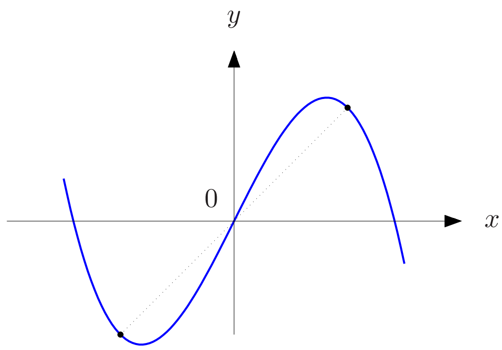


2.6.7 Symmetrie

Eine Funktion f ist gerade, wenn $f(x) = f(-x)$, d.h., wenn der Graph symmetrisch zur y-Achse ist. Für eine ungerade Funktion ist $f(x) = -f(-x)$, und der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung.



gerade Funktion

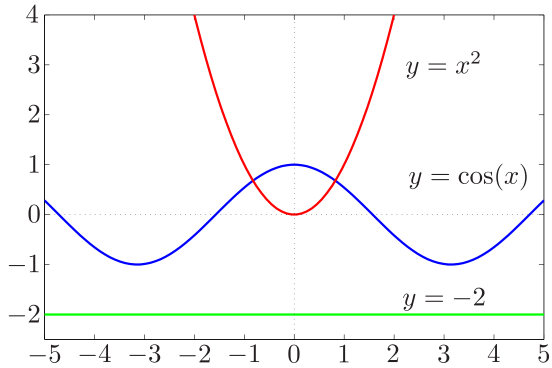


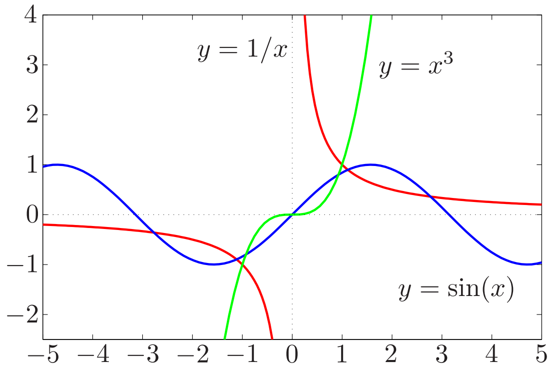
ungerade Funktion

Das Produkt zweier gerader oder ungerader Funktionen ist gerade. Hingegen ist das Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktion ungerade. Beim Bilden von Summen oder Differenzen bleibt der Typ erhalten.

Beispiel:

Die folgende Abbildung zeigt links einige gerade und rechts einige ungerade Funktionen.





Durch Bilden geeigneter Kombinationen erhält man weitere Beispiele. So sind die Funktionen

$$f(x) = x^2 \cos x - x^3 \sin x, \qquad g(x) = -2 + \frac{1}{x^2}$$

gerade und

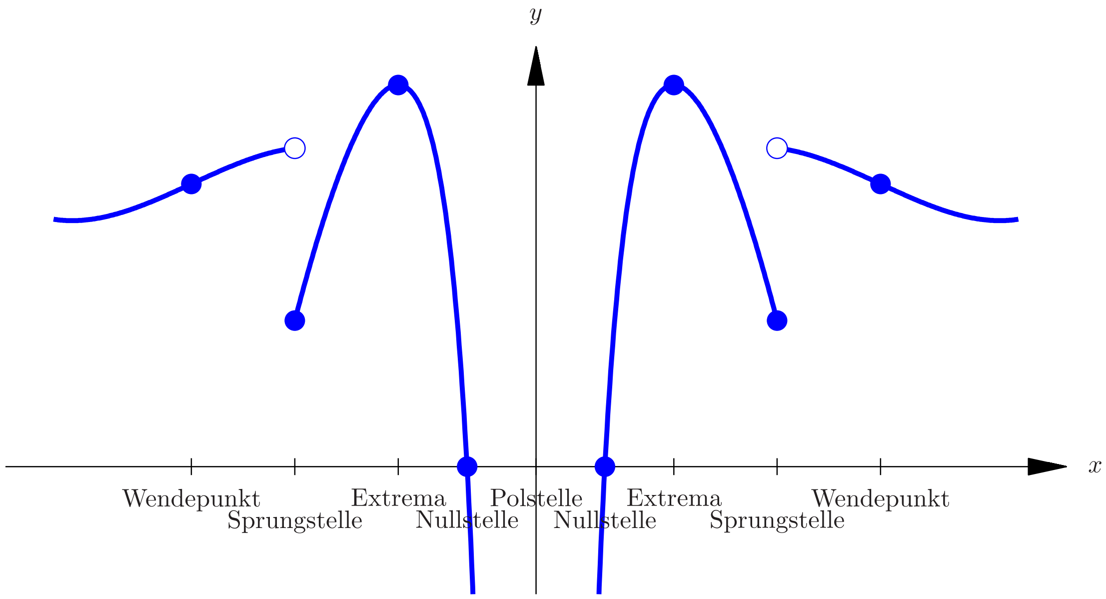
$$h(x) = f(x) \sin x - g(x)x^3$$

ist ungerade.

2.6.8 Kurvendiskussion

Zur Beurteilung des qualitativen Verhaltens einer Funktion können folgende Merkmale herangezogen werden:

- Symmetrien
- Periodizität
- Unstetigkeitsstellen
- Nullstellen ($\rightarrow$ Vorzeichen)
- Extrema ($\rightarrow$ Monotoniebereiche)
- Wendepunkte ($\rightarrow$ Konvexitätsbereiche)
- Polstellen
- Asymptoten



Eine entsprechende Analyse der Funktion wird als Kurvendiskussion bezeichnet.

Beispiel:

Zur Illustration einer Kurvendiskussion wird die Funktion

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin(3x)$$

untersucht.
Symmetrie: Da $\sin x = -\sin(-x)$ ist die Funktion ungerade.
Periodizität: Die Funktion ist wie die Sinusfunktion selbst 2π-periodisch und wird im Folgenden daher nur auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ betrachtet.
Unstetigkeitsstellen: Die Funktion ist aus stetigen Funktionen zusammengesetzt und hat daher keine Unstetigkeitsstellen.
Nullstellen: Mit dem Additionstheorem $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$ ist

$$f(x) = 2\sin x - \frac{4}{3}\sin^3 x = \sin x \underbrace{\left(2 - \frac{4}{3}\sin^2 x\right)}_{\neq 0}.$$

Die Funktion besitzt Nullstellen bei 0 und $\pm\pi$.
Extrema: Die Ableitung

$$f'(x) = 2\cos x - 4\sin^2 x\,\cos x = -2\cos x + 4\cos^3 x$$

ist Null für $\cos x = 0$ oder $\cos x = \pm 1/\sqrt{2}$, also

$$x = \pm\pi/2 \quad \vee \quad x = \pm\pi/4 \quad \vee \quad x = \pm 3\pi/4\,.$$

Da die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und periodisch ist, sind keine Randwerte zu betrachten. Aus dem Vorzeichen der zweiten Ableitung

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x\,\sin x$$

und durch Vergleich der Funktionswerte läßt sich also der Typ der Extrema bestimmen:

x	$f(x)$	$f''(x)$	Typ
$-3\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$-\pi/2$	$-2/3$	$-2 < 0$	lokales Maximum
$-\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum
$\pi/2$	$2/3$	$2 > 0$	lokales Minimum
$3\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum

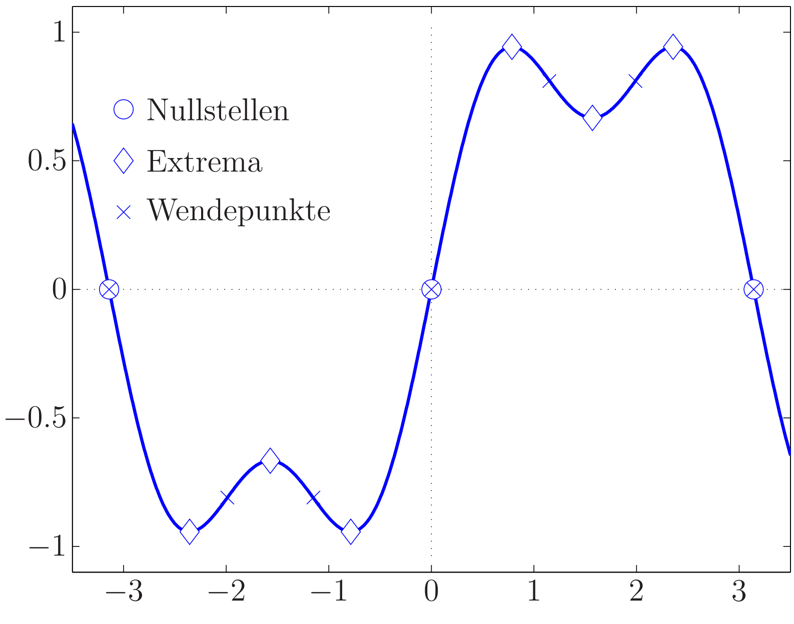
Wendepunkte: Die zweite Ableitung

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x\, \sin x = -10\sin x + 12\sin^3 x$$

ist Null für $\sin x = 0$ oder $\sin x = \pm\sqrt{5/6}$, d.h.

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \pm\pi \quad \vee \quad x \approx \pm 1.15 \quad \vee \quad x \approx \pm 1.99$$

Da die dritte Ableitung an diesen Stellen nicht verschwindet. Die Funktion f hat also Wendepunkte bei $(0,0)$ und $(\pm\pi, 0)$ sowie näherungsweise bei $(-1.99, -0.81)$, $(-1.15, -0.81)$, $(1.15, 0.81)$ und $(1.99, 0.81)$.
Polstellen: Die stetige Funktion besitzt keine Polstellen.
Asymptoten: Die Funktion ist periodisch und nicht konstant, hat also keine Asymptoten.



Beispiel:

Zur Illustration einer Kurvendiskussion wird die Funktion

$$f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{20(x-1)(x+1)}$$

untersucht.
Symmetrie: Der Zähler ist ungerade und der Nenner gerade. Die Funktion ist also ungerade, d.h. punktsymmetrisch zum Ursprung.

Periodizität: Die Funktion ist nicht periodisch.
Unstetigkeitsstellen: Die Nennernullstellen ± 1 sind keine Zählernullstellen. Somit ist f auf $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ stetig.
Nullstellen: Der Zähler verschwindet für $x = 0$.
Extrema:

$$f'(x) = \frac{5x^4 - 19x^2 - 4}{20(x^2-1)^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$$

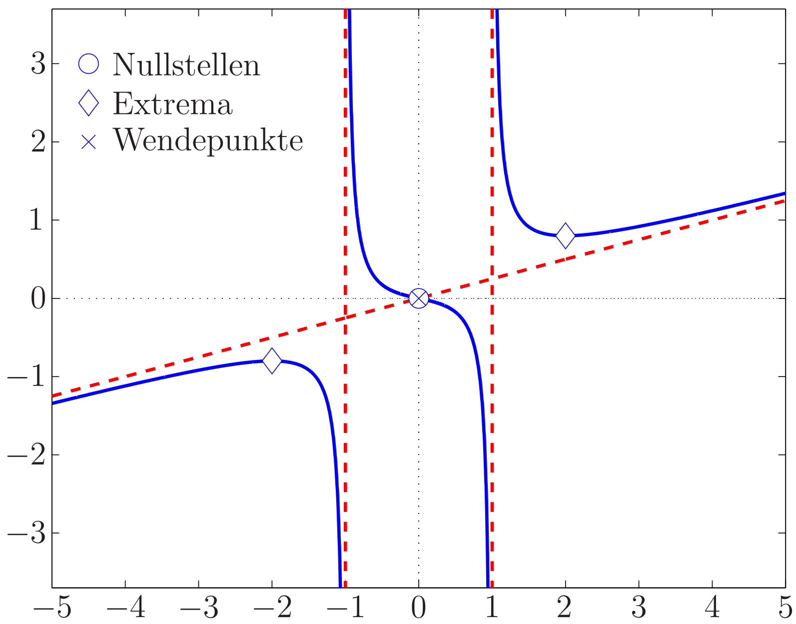
Da die Funktion einfache Pole besitzt, sind die Extrema nur lokal. Dabei kann der Typ aus dem qualitativen Verhalten von f gefolgert werden. Da $f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$ und $x \to -1$, muss das Intervall $(-\infty, -1)$ ein lokales Maximum enthalten. Analog enthält $(1, \infty)$ mindestens ein lokales Minimum. Zu den Nullstellen der Ableitung erhält man also ein lokales Maximum bei $(-2, -4/5)$ und ein lokales Minimum bei $(2, 4/5)$.
Wendepunkte:

$$f''(x) = \frac{9x(x^2+3)}{20(x^2-1)^3} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Da die zweite Ableitung an dieser Stelle einen Vorzeichenwechsel hat, ist $(0, 0)$ ein Wendepunkt.
Polstellen: Die Funktion besitzt bei $x = \pm 1$ einfache Polstellen.
Asymptoten: Eine Polynomdivision liefert

$$f(x) = \frac{5}{20}x + 0 + \frac{9x}{20(x^2-1)}$$

und somit $p(x) = x/4$ als Asymptote.



Beispiel:

Zur Illustration einer Kurvendiskussion wird die Funktion

$$f(x) = e^{-x^2} + \frac{4|x|}{e^4}$$

untersucht.

Symmetrie: Da x^2 und $|x|$ gerade sind, ist die Funktion gerade, d.h. symmetrisch zur y-Achse.
Periodizität: Die Funktion ist nicht periodisch.
Unstetigkeitsstellen: Die Funktion ist aus stetigen Funktionen zusammengesetzt und hat daher keine Unstetigkeitsstellen. Wie für die Betragsfunktion sind allerdings alle Ableitungen im Nullpunkt unstetig.
Nullstellen: Die Exponentialfunktion ist stets positiv, die Betragsfunktion nicht negativ. Es gibt also keine Nullstellen.
Extrema:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} + \frac{4}{e^4}\operatorname{sign}(x) \stackrel{!}{=} 0,\ x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2\,.$$

Zusätzlich ist der kritische Punkt $x = 0$ zu betrachten, wo die Ableitung unstetig ist. Da die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, ist auch das Verhalten für x gegen $\pm\infty$ zu berücksichtigen. Da $f(x) \to \infty$ für $x \to \pm\infty$, besitzt f mindestens ein globales Minimum, jedoch kein globales Maximum. Vergleich der y-Werte der kritischen Punkte

$$(-2, 9/e^4) \qquad (0, 1) \qquad (2, 9/e^4)$$

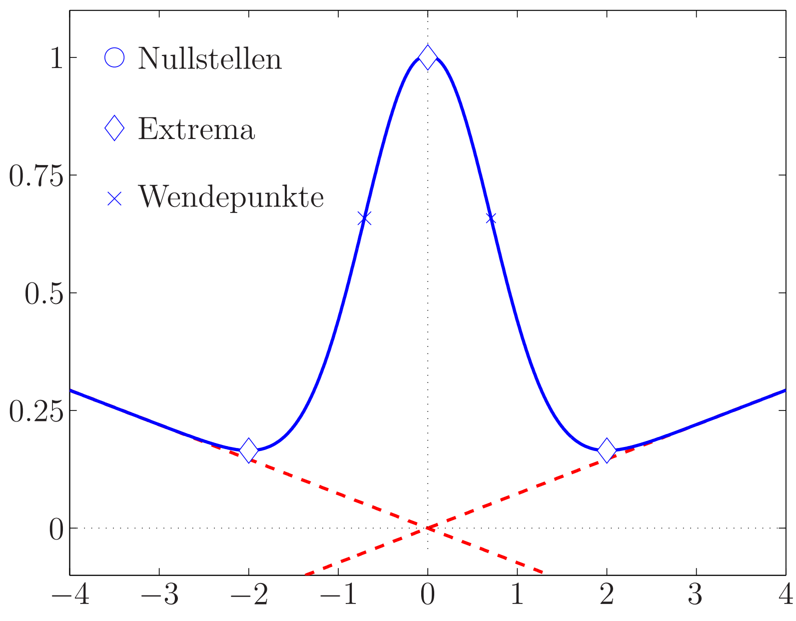
zeigt, dass das globale Minimum bei $x = \pm 2$ angenommen wird. Da f auf dem Intervall $[-2, 2]$ sowohl ein Minimum als auch ein Maximum besitzt, folgt dass $(0, 1)$ ein lokales Maximum ist.
Wendepunkte:

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1/\sqrt{2}$$

Die dritte Ableitung ist an diesen Stellen $\neq 0$. Folglich besitzt f die Wendepunkte

$$\left(\pm\, 1/\sqrt{2},\, e^{-1/2} + \frac{4}{\sqrt{2}\, e^4}\right)\,.$$

Polstellen: Die Funktion besitzt keine Polstellen.
Asymptoten: Da e^{-x^2} schneller als $|x|$ für $x \to \infty$ gegen Null geht, hat die Funktion die Asymptoten $p_+(x) = \frac{4x}{e^4}$ und $p_-(x) = \frac{-4x}{e^4}$.



2.7 Integralrechnung

2.7.1 Riemann-Integral

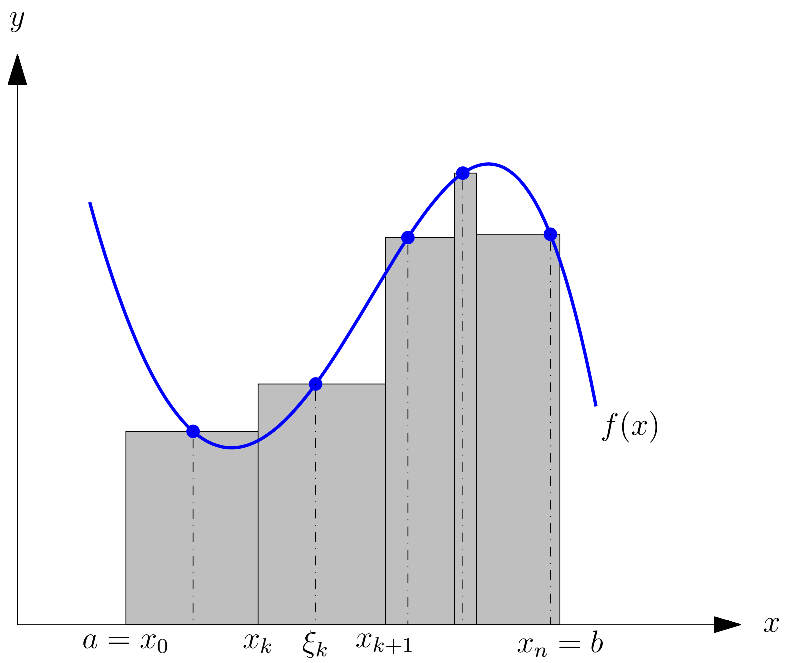
Das bestimmte Integral einer stückweise stetigen Funktion f ist durch

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\Delta|\to 0} \int_a^b f_\Delta = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_k f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

definiert. Dabei bezeichnet $\Delta:\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$,

$$|\Delta| = \max_k \Delta x_k\,, \qquad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}\,,$$

ist die maximale Intervallänge und ξ_k ein beliebiger Punkt im k-ten Intervall. Die Summen auf der rechten Seite der Integraldefinition werden Riemann-Summen genannt.



Für positives f entspricht $\int_a^b f(x)\,dx$ dem Inhalt der Fläche unterhalb dem Graphen von f.

Beispiel:

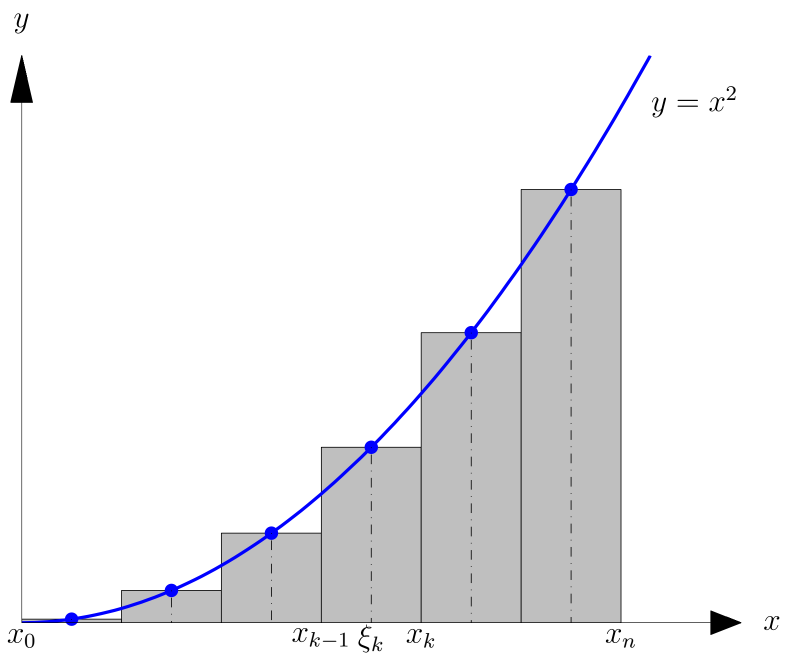
Zur Berechnung von $\int_0^1 x^2\,dx$ als Riemann-Integral kann die Folge von Partitionen

$$\Delta_n : x_i = i/n\,,\ i = 0, \ldots, n\,,$$

verwendet werden mit den Auswertungsstellen

$$\xi_i = (2i-1)/(2n)\,,\ i = 1, \ldots, n\,,$$

für die n-te Partition.



Definitionsgemäß erhält man

$$\begin{aligned}\int f_{\Delta_n} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{2i-1}{2n}\right)^2 = \frac{1}{4n^3}\left(4\sum_{i=1}^{n} i^2 - 4\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right) \\ &= \frac{1}{4n^3}\left(\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12n^2}\end{aligned}$$

und somit $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_{\Delta_n} = \dfrac{1}{3}$.

2.7.2 Eigenschaften des Integrals

Das bestimmte Integral besitzt folgende Eigenschaften:

- Linearität: $\displaystyle\int rf = r\int f\,,\ \int f+g = \int f + \int g$
- Monotonie: $\displaystyle f \le g \implies \int f \le \int g$
- Additivität: $\displaystyle\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$

In Übereinstimmung mit der letzten Eigenschaft definiert man $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

2.7.3 Stammfunktion

Eine Funktion F mit $F' = f$ ist eine Stammfunktion von f, und man schreibt

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

für die Menge aller Stammfunktionen, die als unbestimmtes Integral von f bezeichnet wird. Die Integrationskonstante c ist beliebig. Beispielsweise ist

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

mit $F_a(a) = 0$ eine mögliche Stammfunktion.
Nicht zu allen elementaren Funktionen ist die explizite Angabe einer solchen Stammfunktion möglich, ein Beispiel ist $f(x) = \exp(x^2)$.

Beispiel:

Jede der Funktionen

$$F_1(x) = x^3 + 2\,, \quad F_2(x) = x^3\,, \quad F_3(x) = x^3 - 1$$

ist Stammfunktion von

$$f(x) = x^2\,.$$

Für $f(x) = \frac{1}{x}$ ist

$$F(x) = \ln(c|x|)$$

mit $c > 0$ eine Stammfunktion.

2.7.4 Hauptsatz der Integralrechnung

Ist F eine Stammfunktion einer stetigen Funktion f, d.h. $f = F'$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

bzw. in Kurzschreibweise

$$\int_a^b f = [F]_a^b\,.$$

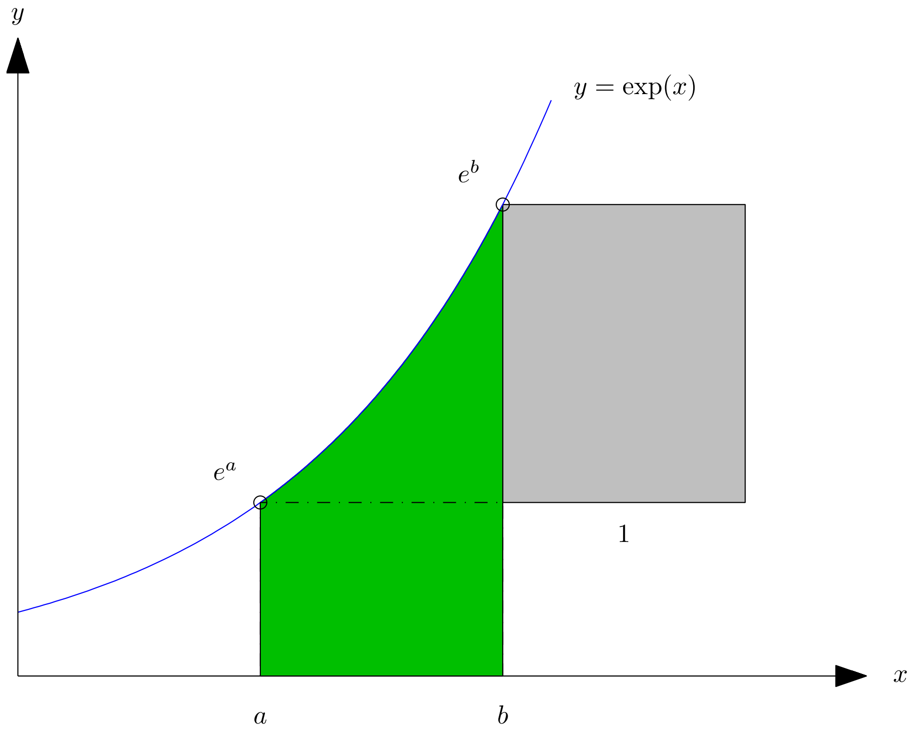
Ein bestimmtes Integral lässt sich also als Differenz der Funktionswerte der Stammfunktion an den Intervallendpunkten berechnen.

Beispiel:

Die Ableitung der Exponentialfunktion ist wieder die Exponentialfunktion und daher ist

$$\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a\,.$$

Die Fläche unter dem Graph zwischen a und b ist also gleich der eines Rechtecks mit Breite 1 und dem Abstand der Funktionswerte als Höhe.



Die Ableitung der Logarithmusfunktion $F(x) = \ln(x)$ ist $F'(x) = 1/x$, $x \in \mathbb{R}^+$ und somit

$$\int_a^b 1/x\, dx = \ln(b) - \ln(a)\,, \quad a, b \in \mathbb{R}^+\,.$$

Beispiel:

Eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ist $F(x) = \arctan x$. Folglich ist

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}\,.$$

Durch Differenzieren verifiziert man, dass

$$F(x) = -\ln(\cos x)$$

eine Stammfunktion von $f(x) = \tan x$ ist:

$$F'(x) = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x).$$

Folglich ist

$$\int_0^{\pi/4} \tan x\, dx = -\left[\ln(\cos x)\right]_0^{\pi/4} = -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \approx 0.347\,.$$

Beispiel:

Ein Planet der Masse M erzeugt ein Gravitationsfeld, bei dem auf einen Körper der Masse m die Kraft $F(x) = \gamma \frac{mM}{x^2}$ ausgeübt wird. Dabei ist γ die Gravitationskonstante und x der Abstand der Schwerpunkte.
Eine Stammfunktion für $1/x^2$ ist $-1/x$. Um einen Körper vom Abstand a zum Abstand b zu bringen, muss somit die Arbeit

$$\int_a^b F(x)\,dx = \gamma mM \int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx = -\left[\gamma mM/x\right]_a^b = \gamma mM(1/a - 1/b)$$

verrichtet werden.
Für a gleich dem Radius des Planeten und $b \to \infty$ lässt sich durch Gleichsetzen mit der kinetischen Energie die sogenannte Fluchtgeschwindigkeit v bestimmen, d.h. die Geschwindigkeit, die notwendig ist, um das Gravitationsfeld eines Planeten zu verlassen:

$$\frac{m}{2}v^2 = \gamma \frac{mM}{a} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\gamma \frac{2M}{a}}\,.$$

Am Äquator ist für die Erde $v = 11.2\,\mathrm{km/s}$.

2.7.5 Wichtige Stammfunktionen

Die folgende Tabelle zeigt Stammfunktionen $F(x)$ zu den Grundfunktionen $f(x)$:

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$x^s\,,\ s \neq -1$	$x^{s+1}/(s+1)$	$1/x$	$\ln\|x\|$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$
$\sin x$	$-\cos x$	$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$	$\sin x \cos x$	$\sin^2(x)/2$
$1/(1+x^2)$	$\arctan x$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$

2.7.6 Partielle Integration

Aus der Produktregel $(fg)' = f'g + fg'$ ergibt sich eine analoge Formel für unbestimmte Integrale:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

Entsprechend gilt

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

für bestimmte Integrale. Dabei ist zu beachten, dass der Randterm $[fg]_a^b$ verschwindet, wenn eine der beiden Funktionen an den Intervallendpunkten Null ist. Er entfällt ebenfalls für periodische Funktionen mit Periodenlänge $(b-a)$.

Beispiel:

Aus $\displaystyle\int (1+x)^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}\,(1+x)^{\alpha+1} + c$ für $\alpha \neq -1$ folgt

$$\begin{aligned}\int \underset{u}{x}\underset{v'}{\sqrt{1+x}}\,dx &= x\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \int 1\cdot\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\,dx \\ &= \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \frac{4}{15}(1+x)^{5/2} + c.\end{aligned}$$

Analog berechnet man

$$\begin{aligned}\int_0^1 \underset{u}{x}\underset{v'}{\sqrt{1-x}}\,dx &= \left[-x\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right]_0^1 + \int_0^1 1\cdot\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\,dx \\ &= 0 - \left[\frac{4}{15}(1-x)^{5/2}\right]_0^1 = \frac{4}{15}\,.\end{aligned}$$

2.7.7 Variablensubstitution

Aus der Kettenregel

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = f(g(x))g'(x), \quad f = F',$$

folgt durch Bilden von Stammfunktionen für eine Substiution $y = g(x)$

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(y) + c = \int f(y)\,dy\,.$$

Entsprechend gilt

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

für bestimmte Integrale. Mit Hilfe von Differentialen läßt sich diese Formel in der Form

$$\int_a^b f(g(x))\frac{dy}{dx}\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

schreiben.

Ein einfacher Spezialfall ist eine lineare Variablensubstitution:

$$x \mapsto y = px + q\,.$$

In diesem Fall ist

$$\int f(px+q)\,dx = \frac{1}{q}\,F(y) + c$$

bzw.

$$\int_a^b f(px+q)\,dx = \frac{1}{p}\,[F]_{pa+q}^{pb+q}\,.$$

Beispiel:

Ist die innere Ableitung im Integranden erkennbar, wie beispielsweise für

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx\,,$$

so ist die Anwendung der Substitutionsregel besonders einfach. In dem Beispiel setzt man

$$y = g(x) = \ln x\,, \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

und erhält

$$\int g(x)^2\, g'(x)\, dx = \int y^2\, dy = \frac{1}{3} y^3 + c\,.$$

Nach Rücksubstitution ergibt sich

$$\int \frac{\ln x^2}{x}\, dx = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + c\,.$$

Beispiel:

Typischerweise versucht man durch Substitution den Integranden zu vereinfachen. Beispielsweise liegt es für

$$\int \frac{e^{3y}}{e^{2y} - 1}\, dy$$

nahe

$$y = g(x) = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$$

zu setzen. Dies ergibt wegen

$$\frac{dy}{dx} = g'(x) = \frac{1}{x} = e^{-y}$$

das transformierte unbestimmte Integral

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{x^2 - 1} \frac{dy}{dx}\, dx &= \int \frac{x^2}{x^2 - 1}\, dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2 - 1}\right) dx \\ &= \int 1\, dx + \int \frac{1}{x^2 - 1}\, dx = x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + c\,. \end{aligned}$$

Durch Rücksubstitution von $x = e^y$ erhält man schließlich

$$F(y) = e^y + \frac{1}{2} \left| \frac{e^y - 1}{e^y + 1} \right| + c\,.$$

2.7.8 Mercator-Projektion

Die Stammfunktion

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

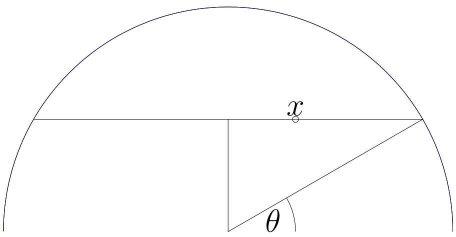
läßt sich mit der Substitution

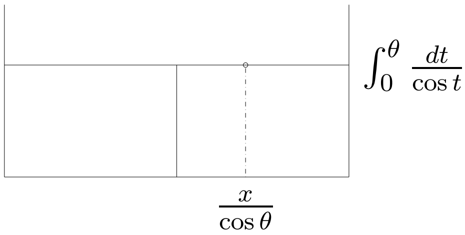
$$u = \frac{1}{\cos x} + \tan x = \frac{1 + \sin x}{\cos x}\,, \qquad du = \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx,$$

berechnen:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\cos x} &= \int (\cos x)^{-1}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{-1} du\\ &= \int \frac{du}{u} = \ln|u|+c\\ &= \ln\left|\frac{1}{\cos x}+\tan x\right|+c.\end{aligned}$$

Eine Anwendung ist die Mercator-Projektion. Hierbei wird die Erdoberfläche winkeltreu auf eine Ebene projiziert.

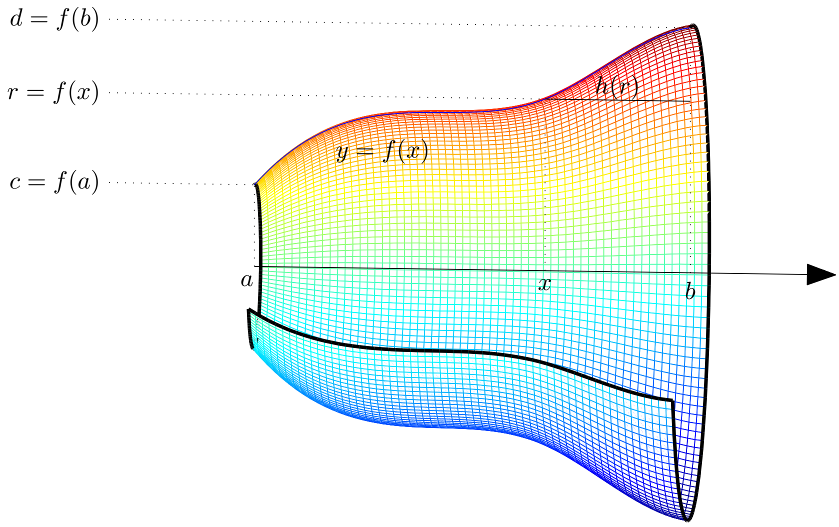




Die Breitenkreise werden dabei mit dem Verhältnis $1/\cos\theta$ gestreckt.

2.7.9 Volumen von Rotationskörpern

Das Volumen V des durch Rotation des Funktionsgraphen $r = f(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$, um die x-Achse erzeugten Körpers lässt sich durch Integration über die kreisförmigen Querschnitte berechnen:



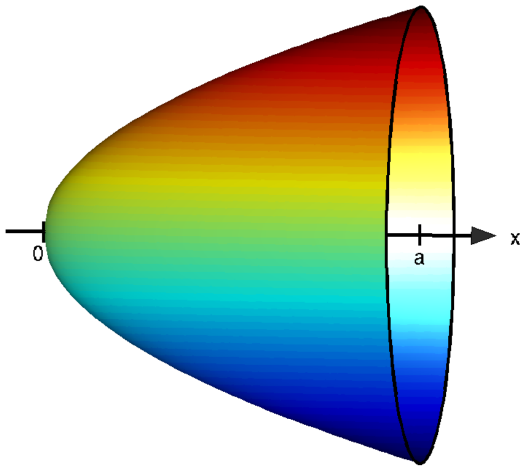
Alternativ kann man über die Zylindermäntel integrieren:

$$V = \pi c^2(b-a) + 2\pi \int_c^d r h(r)\, dr\,,$$

wobei c bzw. d der minimale bzw. maximale Radius r und $h(r)$ die Gesamthöhe des in dem Körper enthaltenen Zylindermantels mit Radius r sind. Diese Variante ist vor allem bei monotoner Radiusfunktion f sinnvoll.

Beispiel:

Das abgebildete Paraboloid entsteht durch Rotation der Kurve $y = \sqrt{x}$ um die x-Achse.



Gemäß der Formel für Rotationskörper ist das Volumen

$$\pi \int_0^a \left(\sqrt{x}\right)^2 \, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{1}{2}\pi a^2 \, .$$

Alternativ erhält man durch Integration über Zylindermäntel

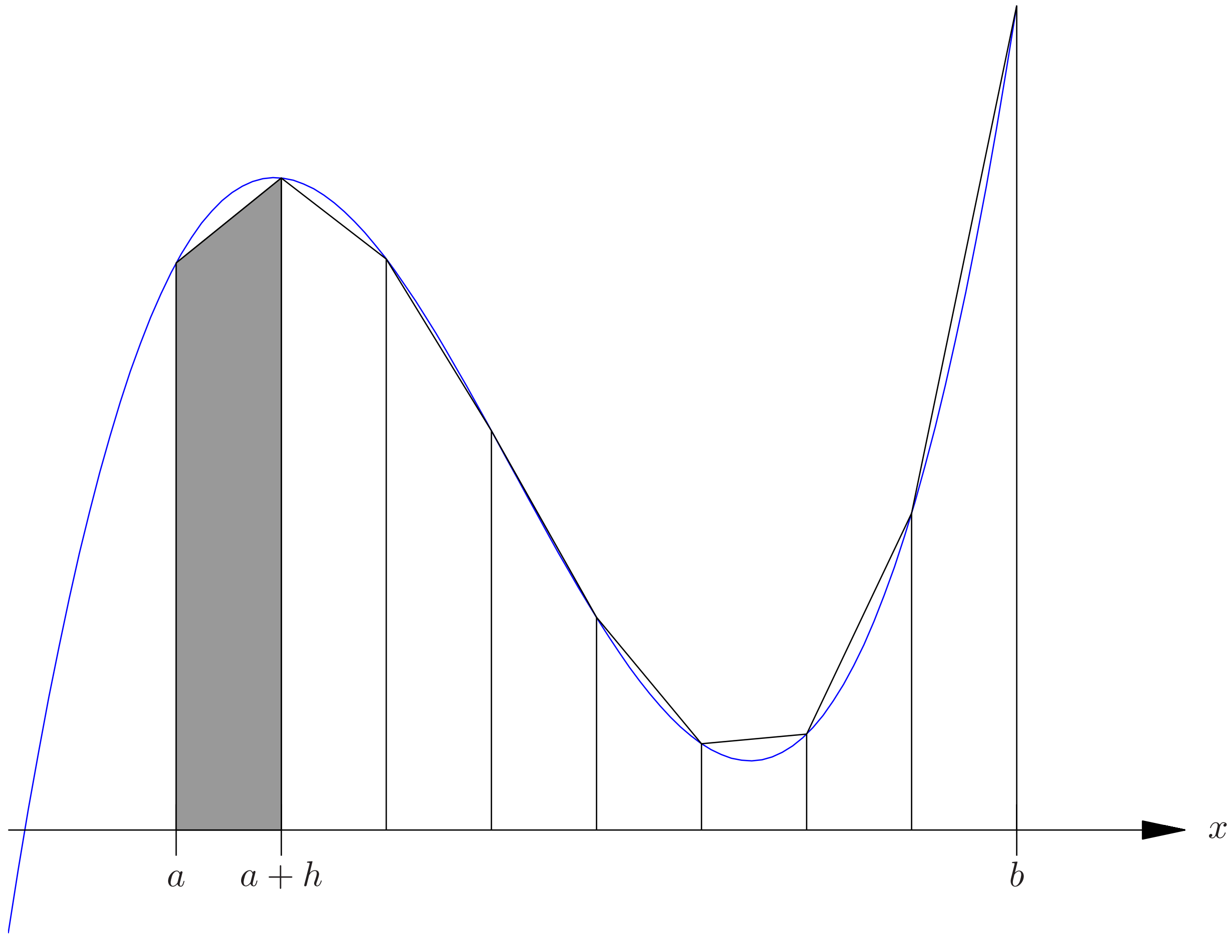
$$2\pi \int_0^{\sqrt{a}} r(a - r^2) dr = 2\pi \left[-\frac{1}{4}(a - r^2)^2\right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{1}{2}\pi a^2 \, .$$

2.7.10 Trapezregel

Die Näherung

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx s_h f = h(f(a)/2 + f(a+h) + \cdots + f(b-h) + f(b)/2)$$

approximiert das Integral durch eine Summe von Trapezflächen.



Für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion gilt für den Fehler:

$$s_h f - \int_a^b f = \frac{b-a}{12} f''(r) h^2,$$

für ein $r \in [a, b]$.
Genauer besitzt der Fehler für glatte Funktionen die asymptotische Entwicklung

$$s_h f - \int_a^b f = c_1(f'(b) - f'(a))h^2 + c_2(f'''(b) - f'''(a))h^4 + \dots$$

mit von f und h unabhängigen Konstanten c_j. Daraus folgt, dass die Trapezregel für $(b-a)$-periodische Funktionen sehr genau ist. Der Fehler strebt schneller als jede h-Potenz gegen Null.

Beweis:

Der Fehler auf einem Intervall ist

$$\frac{h}{2}(f(0) + f(h)) - \int_0^h 1 \cdot f = \int_0^h (t - h/2) f'(t)\, dt.$$

Nochmalige partielle Integration und Anwendung des Mittelwertsatzes ergibt

$$-\int_0^h \frac{1}{2} t(t-h) f''(t)\, dt = \underbrace{-\int_0^h \frac{1}{2} t(t-h)\, dt}_{h^3/12}\; f''(r).$$

Nach Summation über alle Teilintervalle erhält man

$$\frac{1}{12}h^3 \sum_{i=1}^{n} f''(r_i).$$

Die Summe läßt sich durch

$$n \min f'' \leq \sum f''(r_i) \leq n \max f''$$

abschätzen. Nach dem Zwischenwertsatz folgt schließlich

$$\sum f''(r_i) = nf''(r) = \frac{b-a}{h} f''(r)\,,$$

mit einem $r \in [a, b]$.
Der Beweis der asymptotischen Fehlerentwicklung ist aufwändiger. Er beruht auf sukzessiver partieller Integration des Restgliedes und einer geeigneten Behandlung der Randterme.

2.8 Aufgaben und Test

2.8.1 Aufgaben

Aufgabe 1 (Online-Nummer 329):
Schon kurz nach Studienbeginn ist Freshman Felix überzeugt, zur Lösung der HM-Aufgaben einen High-End PC zu benötigen.
Kosten: 5000 DM – Sparbuchstand: 0 DM.

a) Seine Bank bietet ihm einen Kredit, der durch 24 gleich große Monatsraten getilgt werden soll. Die Restschuld wird monatlich mit 1% verzinst; die erste Rate wird einen Monat nach Kreditaufnahme bezahlt. Wie hoch sind die Monatsraten r anzusetzen?

b) Felix entschließt sich, den Kredit ohne Ratenzahlungen nach zwei Jahren zurückzubezahlen. Wie hoch ist diese Summe bei jährlicher, vierteljährlicher, monatlicher, täglicher oder stetiger Verzinsung mit 12% bzw. 3% bzw. 1% …? Bestimmen Sie jeweils den jährlichen Effektivzins.

Aufgabe 2 (Online-Nummer 476):
Die Funktion f sei an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar und genüge für alle $x, y \in \mathbb{R}$ der Gleichung $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

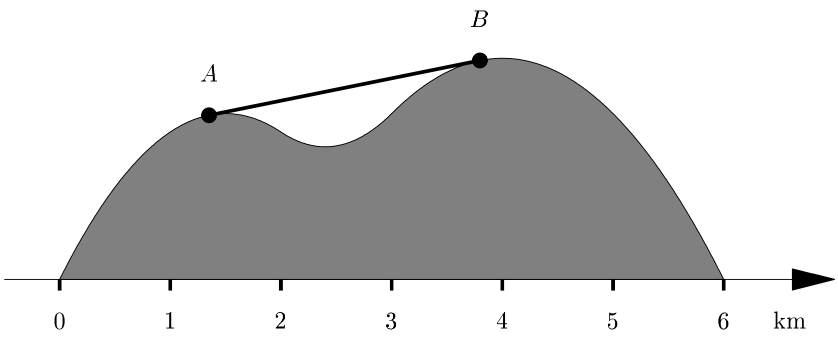
a) Zeigen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.

b) Beweisen Sie, dass eine Konstante $a \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x) = ax$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (Online-Nummer 111):
Ein Geländeprofil wird näherungsweise durch die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{15}\,x^2 + \frac{1}{5}\,x, & \text{für} \quad x \in [0,2], \\ \frac{1}{12}\,x^2 - \frac{2}{5}\,x + \frac{3}{5}, & \text{für} \quad x \in (2,3], \\ -\frac{1}{20}\,x^2 + \frac{2}{5}\,x - \frac{3}{5}, & \text{für} \quad x \in (3,6] \end{cases}$$

beschrieben. Die beiden Berge sollen durch eine Seilbahn verbunden werden, die an beiden Enden tangential zur obigen Profilkurve verläuft (vgl. Abbildung).



Wo müssen die beiden Stationen A und B gebaut werden – und welche Länge hat die Seilbahnstrecke? Der Durchhang des Seils ist zu vernachlässigen.

Aufgabe 4 (Online-Nummer 382):
Differenzieren Sie:

a) $(\ln x)^{\ln x}$ **b)** $\tan \frac{1+x}{1-x}$ **c)** $\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2+1}}$

Aufgabe 5 (Online-Nummer 133):
Gegeben sei die Funktion $f(x) = (x+2)\sqrt{4-x^2}$.

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist f definiert? Untersuchen Sie, wo f differenzierbar ist, und berechnen Sie $f'(x)$.

b) Welche Nullstellen und lokalen Extrema besitzt f ?

c) Wie verhält sich f' am Rand des Definitionsbereichs?

d) Skizzieren Sie den Graph von f.

Aufgabe 6 (Online-Nummer 137):
Für $m, n \in \mathbb{N}$ sei f

$$f(x) = x^m (1-x)^n, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

a) Untersuchen Sie f auf Nullstellen und lokale Extrema. Wie verhält sich $f(x)$ für $x \longrightarrow \pm\infty$?

b) Skizzieren Sie den Graph von f im Fall $m = 2$ und $n = 3$.

c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt.

Aufgabe 7 (Online-Nummer 113):
Seien f und g die durch $f(x) = \sqrt{3+2x} - x$ und $g(x) = \ln(f(x))$ gegebenen reellwertigen Funktionen.

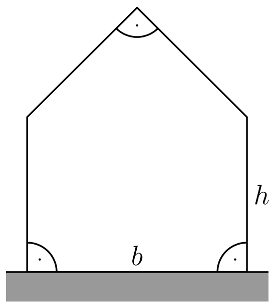
a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f und skizzieren Sie den Graph. Wür welche x ist die Funktion g definiert?

b) Untersuchen Sie g auf Nullstellen, Asymptoten und lokale Extrema.

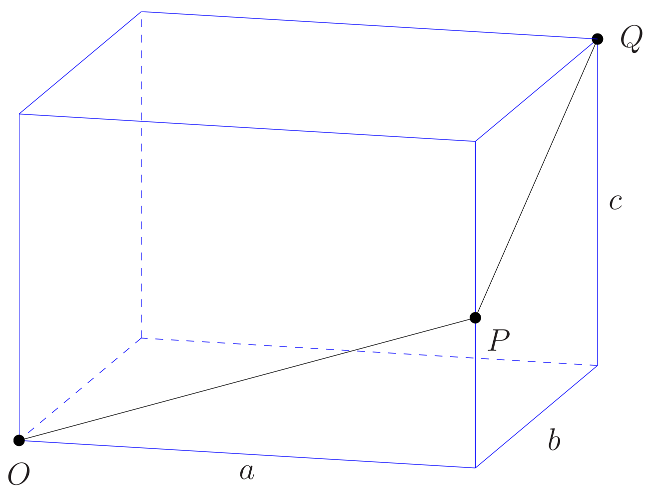
c) Wie verhalten sich g und g' an den Randpunkten des Definitionsbereichs?

d) Zeichnen Sie den Graph der Funktion g.
Hinweis: $\ln 2 \approx 0,69$; $\ln 3 \approx 1,10$.

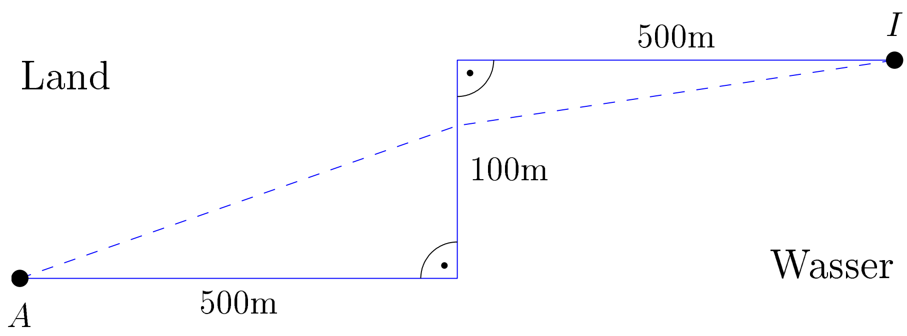
Aufgabe 8 (Online-Nummer 120):
Die Vorderfront eines Gewächshauses soll die Form eines achsensymmetrischen Fünfecks mit drei rechten Winkeln besitzen (vgl. Abbildung). Der Umfang darf maximal 20 m betragen. Wie ist die Breite b und Höhe h der Seitenwand zu wählen, damit die Fläche A der Vorderfront maximal wird?



Aufgabe 9 (Online-Nummer 392):
Wie muss für einen Quader mit den Kantenlängen a, b, c der Punkt P gewählt werden, damit der Polygonzug OPQ die kürzeste auf der Oberfläche des Quaders gelegene Verbindung von O und Q darstellt?



Aufgabe 10 (Online-Nummer 393):
Welchen Weg muß ein Mensch im Punkt A einschlagen, um möglichst schnell zu der Insel I zu gelangen, wenn er fünfmal so schnell läuft, wie er zu schwimmen vermag?



Aufgabe 11 (Online-Nummer 501):
Bilden Sie eine Stammfunktion von

$$\textbf{a)}\quad \frac{(\ln x)^3}{x}\,, \qquad \textbf{b)}\quad \cos^3 x\,\sin^5 x\,, \qquad \textbf{c)}\quad \sqrt{4-x^2}\,.$$

Aufgabe 12 (Online-Nummer 394):
Bestimmen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe partieller Integration.

$$\textbf{a)}\ \int (\ln x)^2\,dx \qquad \textbf{b)}\ \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin x\,dx \qquad \textbf{c)}\ \int \cos^4 x\,dx$$

Aufgabe 13 (Online-Nummer 119):
Bestimmen Sie die folgenden Integrale durch geeignete Substitutionen:

$$\textbf{a)}\quad \int \frac{dx}{x\ln x} \qquad \textbf{b)}\quad \int \frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx \qquad \textbf{c)}\quad \int \frac{dx}{\sin x\,\cos x}$$

2.8.2 Test

(Online-Test Nummer 96 enthält Aufgaben mit Varianten)

Aufgabe 1:
Ein 1.90 m großer Basketballspieler wirft mit einem Ball auf einen in 3.50 m Höhe aufgehängten Korb (Abwurfwinkel $\varphi = \pi/3$, Abwurfgeschwindigkeit $v = 8\,\mathrm{m/s}$, Erdbeschleunigung $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$). In welcher Entfernung vom Korb muss er den Ball abwerfen, wenn sich dieser beim Eintreffen im Ziel bereits in der absteigenden Flugphase befinden soll?

Antwort: (auf ganze cm gerundet)
Der Basketballspieler muss den Ball in $\boxed{}$ cm Entfernung abwerfen.

Aufgabe 2:
Unter der Generationszeit von Bakterien versteht man das für die Verdopplung der Zellzahl erforderliche Zeitintervall T, das unter anderem von der Beschaffenheit des Kulturmediums abhängt.
Betrachtet werden Bakterien, die auf einem nährstoffreichen Kulturmedium die Generationszeit $T_1 = 20$ Minuten und auf einem nährstoffarmen Kulturmedium die Generationszeit $T_2 = 50$ Minuten besitzen. Die Anfanspopulation auf dem nährstoffarmen Kulurmedium sei zehnmal größer als die Anfangspopulation auf dem nährstoffreichen Medium. Nach wie viel Minuten sind die beiden Populationen gleich groß?

Antwort:

$\square$ Minuten

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}$ und die erste Ableitung der folgenden Funktionen $f : D_f \to \mathbb{R}$.

a) $f(x) = \dfrac{2+x}{3-x}$ **b)** $f(x) = \sqrt{1-e^x}$ **c)** $f(x) = \ln(2+\sin x)$

Antwort: (Eingaben ganzzahlig mit kleinstem positivem c)

a) D_f: $(-\infty,\, a]$ ○ $[a,\, \infty)$ ○ $\mathbb{R}\setminus\{a\}$ ○ $\mathbb{R}$ ○ mit $a = \square$

$f'(x) = \dfrac{b}{(c-x)^d}$ mit $b = \square$, $c = \square$, $d = \square$.

b) D_f: $(-\infty,\, a]$ ○ $[a,\, \infty)$ ○ $\mathbb{R}\setminus\{a\}$ ○ $\mathbb{R}$ ○ mit $a = \square$

$f'(x) = \dfrac{be^x}{c\sqrt{d(1-e^x)}}$ mit $b = \square$, $c = \square$, $d = \square$.

c) D_f: $(-\infty,\, a]$ ○ $[a,\, \infty)$ ○ $\mathbb{R}\setminus\{a\}$ ○ $\mathbb{R}$ ○ mit $a = \square$

$f'(x) = \dfrac{b\cos x}{c + d\sin x}$ mit $b = \square$, $c = \square$, $d = \square$.

Aufgabe 4:
Bestimmen Sie Nullstellen, Polstellen, Extrem- und Wendepunkte der Funktion

$$f(x) = x^2 - \frac{2}{x}$$

und skizzieren Sie den Graphen.

Antwort:

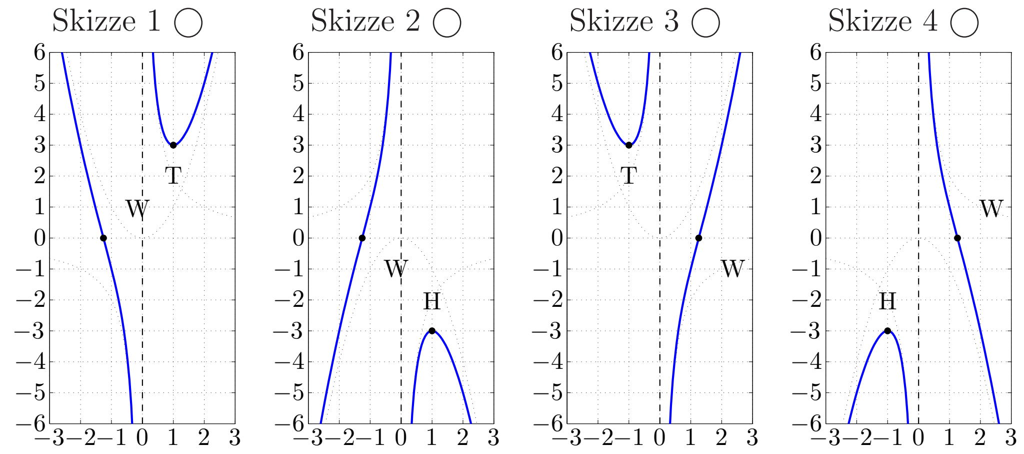
Nullstelle: $\square$

Polstelle: $\square$

Extrempunkt: $\left(\square, \square\right)$: Typ: Minimum ○, Maximum ○ global: ja ○, nein ○

Wendepunkt: $\left(\square, \square\right)$

Skizze:



(auf vier Dezimalstellen gerundet)

Aufgabe 5:
Berechnen Sie

$$\textbf{a)}\quad \int_1^2 (x+1/x)^2\,dx \qquad\qquad \textbf{b)}\quad \int_0^{k\pi} \cos x + \sin x\,dx\,,\ \ k\in\mathbb{N}\,.$$

Antwort:

a) $\boxed{\quad}$ **b)** $k=1:$ $\boxed{\quad}$, $k=2:$ $\boxed{\quad}$

(auf vier Dezimalstellen gerundet)

Aufgabe 6:
Berechnen Sie

$$\textbf{a)}\ \int_0^{\pi} x\sin(2x)\,dx \qquad \textbf{b)}\ \int_1^{e} \ln x\,\frac{dx}{x} \qquad \textbf{c)}\ \int \frac{2x+3}{x^2+4}\,dx\,.$$

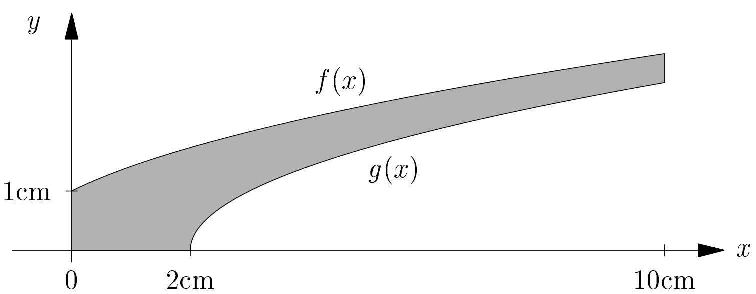
Antwort:

a) $\boxed{\quad}\,\pi/\boxed{\quad}$ **b)** $\boxed{\quad}/\boxed{\quad}$

c) $\ln\left|\boxed{\quad}x^2+\boxed{\quad}x+\boxed{\quad}\right| + \boxed{\quad}/\boxed{\quad}\arctan\left(\boxed{\quad}x/\boxed{\quad}\right)+c$

(Brüche ganzzahlig, gekürzt, Nenner positiv)

Aufgabe 7:
Durch Rotation des unten gezeigten Querschnitts um die x-Achse entsteht eine (nicht sonderlich standfeste) Vase.



$$f(x) = \sqrt{x+1}$$
$$g(x) = \sqrt{x-2}$$

Wie schwer ist die Vase, wenn sie aus Glas der Dichte $2.5\,\mathrm{g/cm^3}$ gefertigt wird?

Antwort:

$m = \boxed{}$ g

(Geben Sie das Gewicht auf ganze Gramm gerundet an.)

Kapitel 3

Lineare Algebra und Geometrie

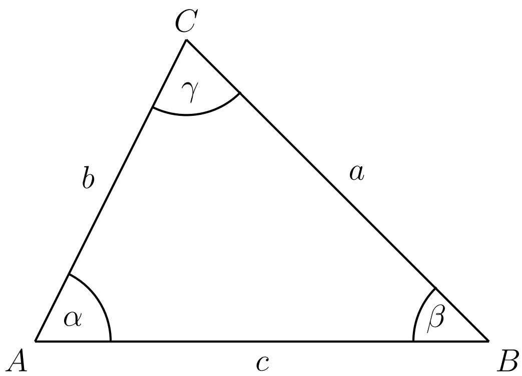
3.1 Elementare Geometrie: Dreiecke

3.1.1 Dreieck

Ein Dreieck besteht aus drei nicht auf einer Geraden liegenden Punkten A, B, C und drei Seiten, den Verbindungsstrecken $\overline{AB}, \overline{AC}$ und $\overline{BC}$ der Punkte. Die Punkte A, B, C heißen Eckpunkte. Die Reihenfolge der Bezeichnungen wird in der Regel entgegen dem Uhrzeigersinn gewählt. Die Längen der Dreiecksseiten werden im Allgemeinen wie folgt benannt:

$$a = |\overline{BC}| \ ; \ b = |\overline{AC}| \quad \text{und} \quad c = |\overline{AC}|$$

Die Winkel bei den Eckpunkten werden üblicherweise mit den ersten drei griechischen Kleinbuchstaben α, β und γ bezeichnet. Dabei erhält der Winkel bei Punkt A die Bezeichnung α, bei B die Bezeichnung β und bei C heißt der Winkel γ.

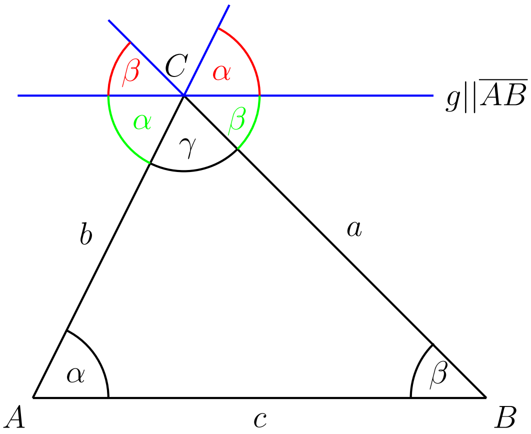


Die Winkelsumme in jedem Dreieck beträgt 180°. Das heißt in einem beliebigen Dreieck gilt stets

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \, .$$

Beweis:

Zum Beweis betrachtet man die folgende Skizze:



Die horizontale blaue Linie ist parallel zu $\overline{AB}$. Daher sind die rot eingezeichneten Winkel die Stufenwinkel zu den Winkeln α und β des Dreiecks, und damit gleich groß wie diese Winkel. Die grün eingezeichneten Winkel sind die zu den Stufenwinkel gehörenden Wechselwinkel, die damit ebenfalls gleich groß wie die entsprechenden Winkel im Dreieck sind. Die Summe dieser Wechselwinkel und γ muss $180°$ ergeben. Es gilt also

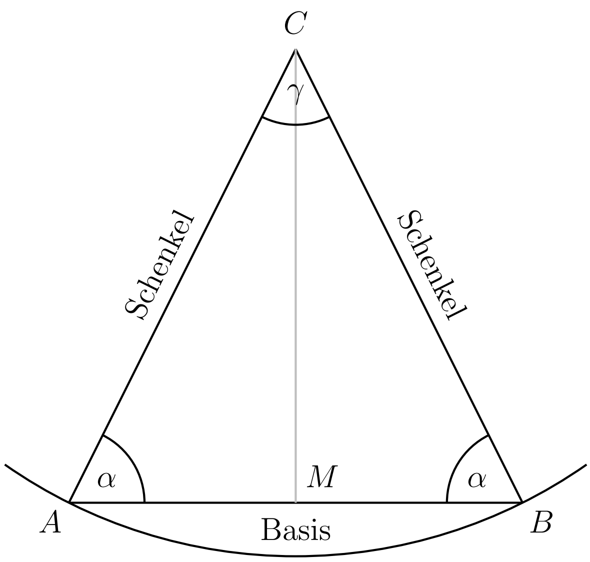
$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \,.$$

3.1.2 Spezielle Dreiecke

Man unterscheidet zwischen den folgenden, speziellen Dreieckstypen.

- Gleichschenkliges Dreieck:

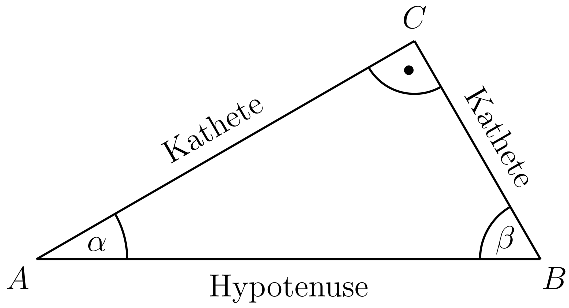
  Bei einem gleichschenkligen Dreieck sind zwei Seiten gleich lang (in der Abbildung unten sind dies beispielsweise die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$). Damit sind die beiden Winkel an der dritten Seite gleich groß. Die beiden gleich langen Seiten heißen Schenkel, die dritte Seite heißt Basis des Dreiecks. Die Winkel α und $\beta = \alpha$ an der Basis sind die Basiswinkel. Der Punkt gegenüber der Basis heißt Spitze. Das folgende Abbildung zeigt ein gleichschenkliges Dreieck mit den üblichen Bezeichnungen.



Bei einem gleichschenkligen Dreieck fallen in $\overline{CM}$ die Höhe, die Seitenhalbierende und Mittelsenkrechte der Basis, sowie die Halbierende des Winkels an der Spitze, zusammen.

- Rechtwinkliges Dreieck:

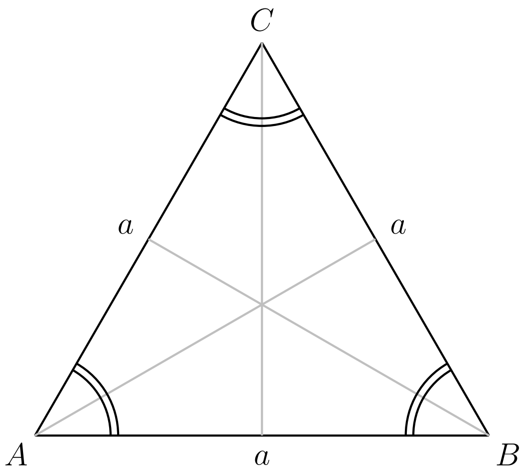
  Ein Dreieck, bei dem einer der drei Winkel ein rechter Winkel ist, heißt rechtwinklig. Wegen der Winkelsumme von 180° im Dreieck ist die Summe der beiden anderen Winkel 90°. Die Seite gegenüber dem rechten Winkel heißt Hypothenuse, die beiden anderen Katheten.



  Im Allgemeinen wird wie in der Abbildung der Eckpunkt mit dem rechten Winkel mit C bezeichnet.

- Gleichseitige Dreiecke:

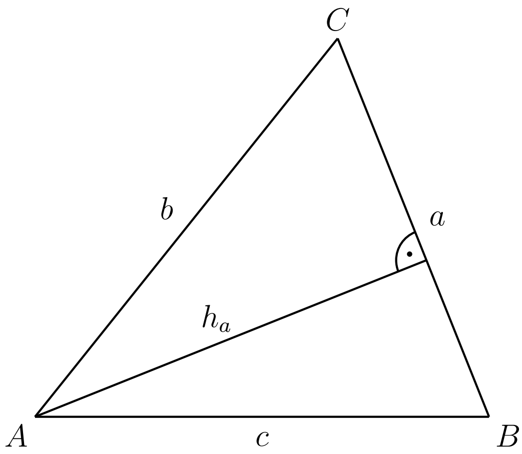
  Ein Dreieck heißt gleichseitig, wenn alle drei Seiten gleichlang sind. Damit sind auch alle Winkel gleich groß, das heißt, wegen der Winkelsumme im Dreieck von 180°, ist jeder Winkel im gleichseitigen Dreieck 60°.



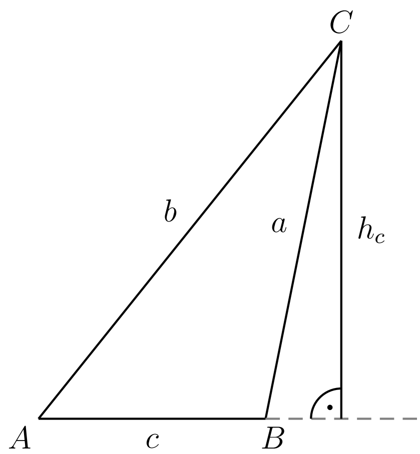
  In einem gleichseitigen Dreieck fallen die Höhen, die Mittelsenkrechten, die Winkelhalbierenden und die Seitenhalbierenden zusammen. Ein gleichseitiges Dreieck wird auch als reguläres oder regelmäßiges Dreieck bezeichnet.

3.1.3 Höhe im Dreieck

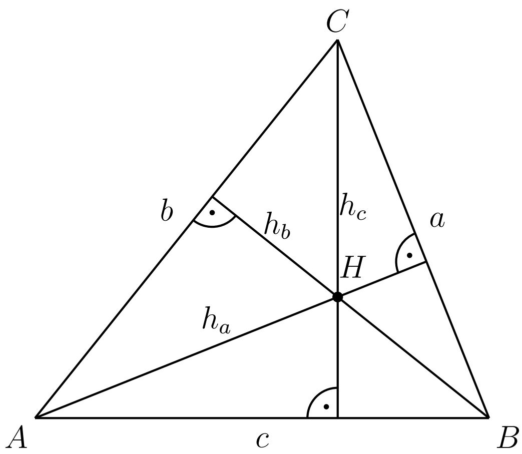
Eine Höhe in einem Dreieck ist das Lot von einem Eckpunkt auf die Gerade durch die gegenüberliegende Seite.



Ist einer der Winkel an der gegenüberliegenden Seite stumpf, so liegt die Höhe außerhalb des Dreiecks.



Wie die folgende Abbildung zeigt, schneiden sich die Höhen in einem als Höhenschnittpunkt bezeichneten Punkt H.

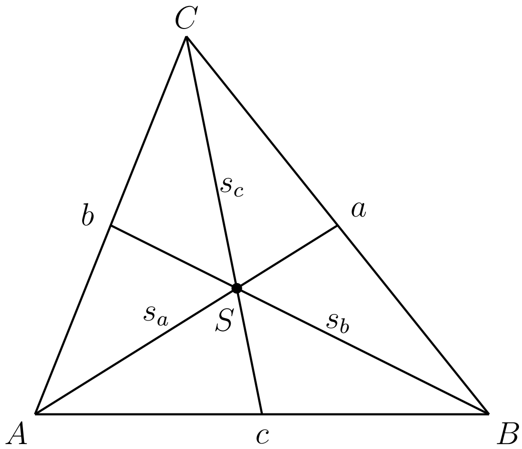


Für den Flächeninhalt F des Dreiecks gilt

$$2F = ah_a = bh_b = ch_c\,.$$

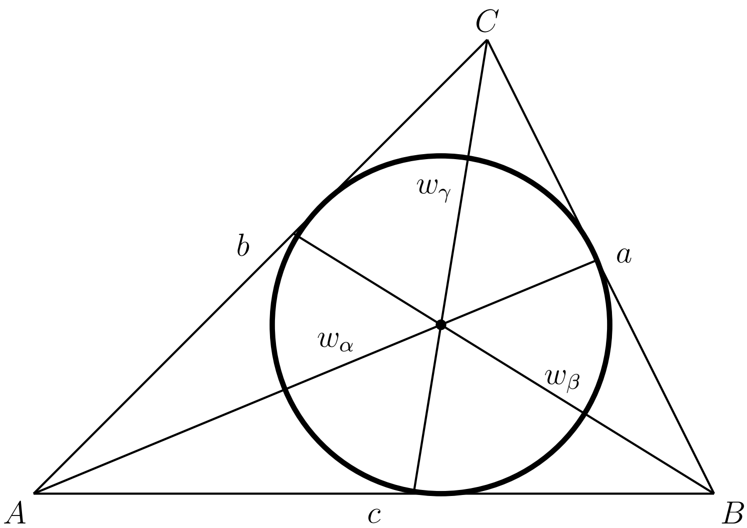
3.1.4 Schwerpunkt, Inkreismittelpunkt, Umkreismittelpunkt

Die Seitenhalbierenden in einem Dreieck schneiden sich in einem Punkt, dem Schwerpunkt des Dreiecks. In der folgenden Abbildung sind die Seitenhalbierenden s_a, s_b, s_c und der Schwerpunkt S eingezeichnet.

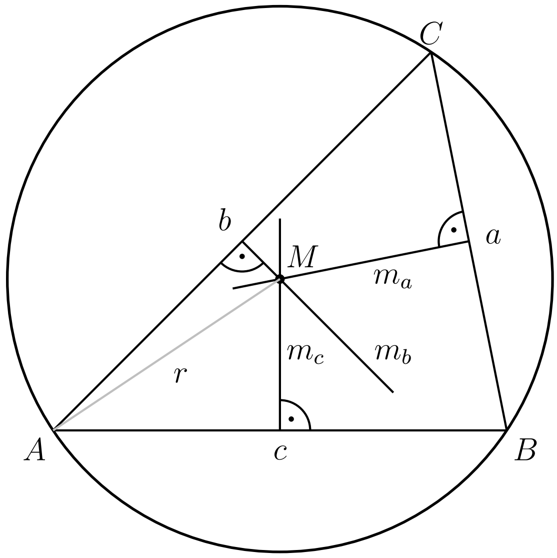


Der Schwerpunkt teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2 : 1.

Die Winkelhalbierenden in einem Dreieck schneiden sich auch in einem Punkt, dem Inkreismittelpunkt. In der folgenden Abbildung sind die Winkelhalbierenden $w_\alpha, w_\beta, w_\gamma$ und der Inkreis eingezeichnet.

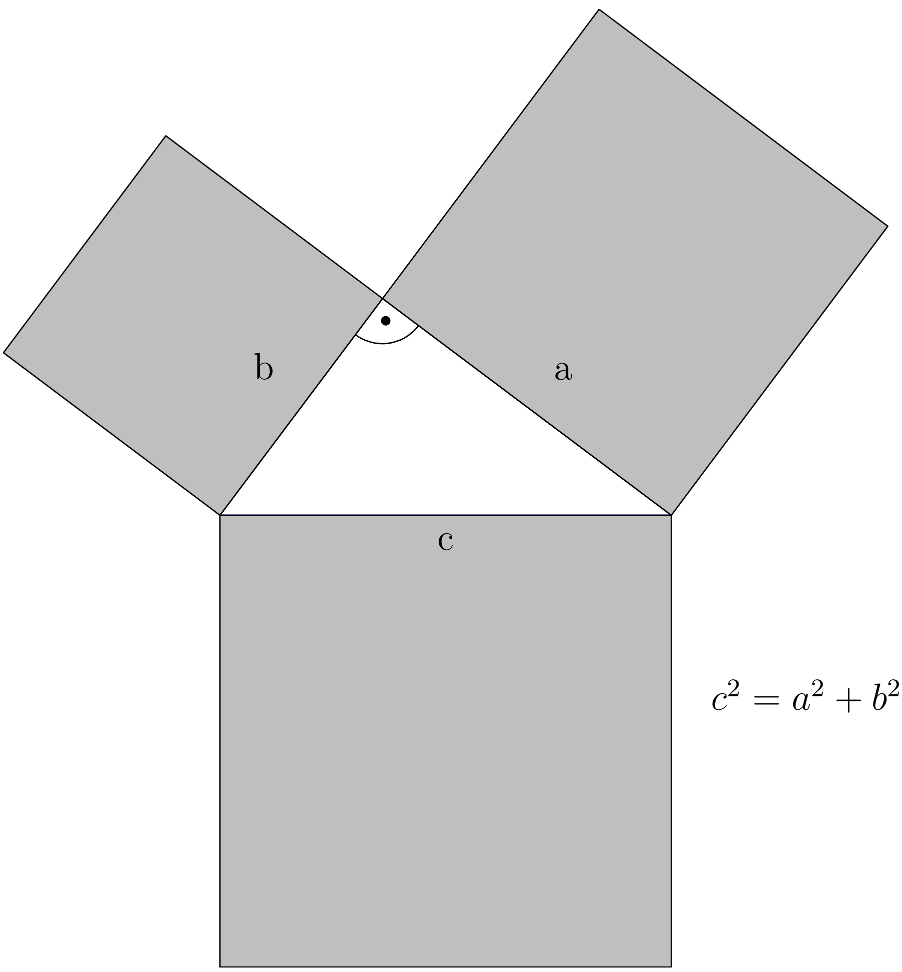


Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem Umkreismittelpunkt. Dies ist in der folgenden Abbildung dargestellt mit den Mittelsenkrechten m_a, m_b, m_c und dem Umkreismittelpunkt M



3.1.5 Satz von Pythagoras

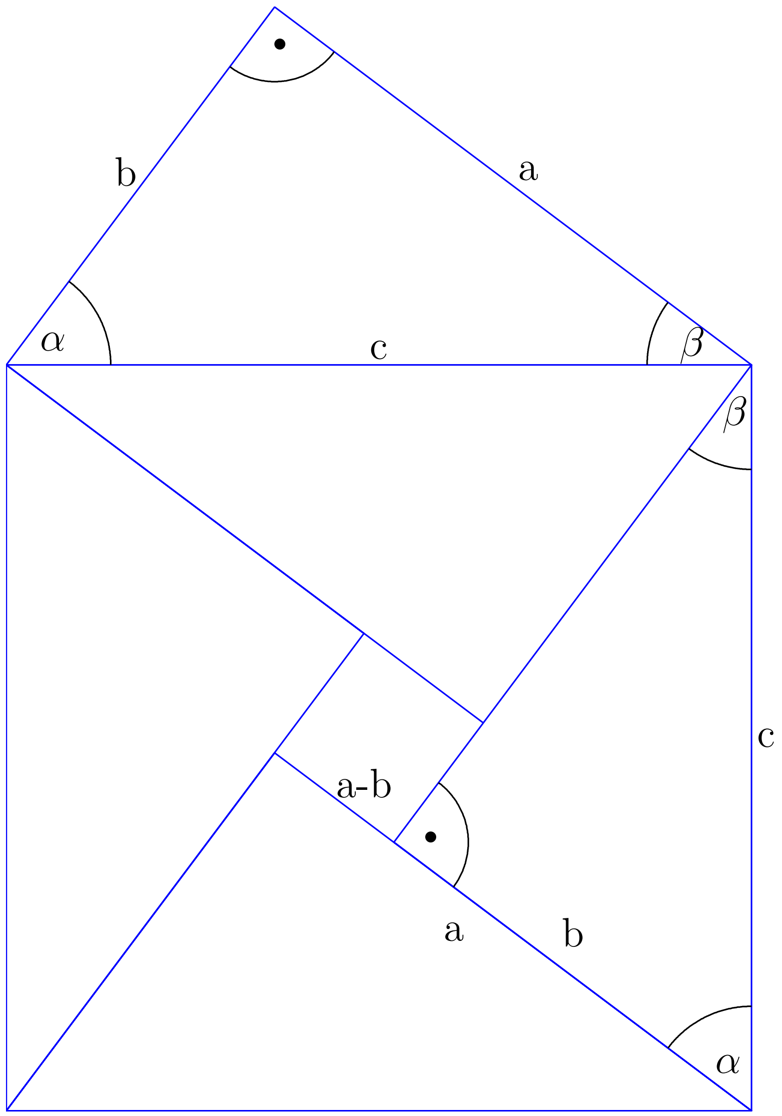
In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate der Katheten:



$$c^2 = a^2 + b^2$$

Geometrischer Beweis des Satzes des Pythagoras

In dem Quadrat über der Hypotenuse mit Flächeninhalt c^2 lassen sich 4 zum Originaldreieck kongruente Dreiecke einzeichnen.



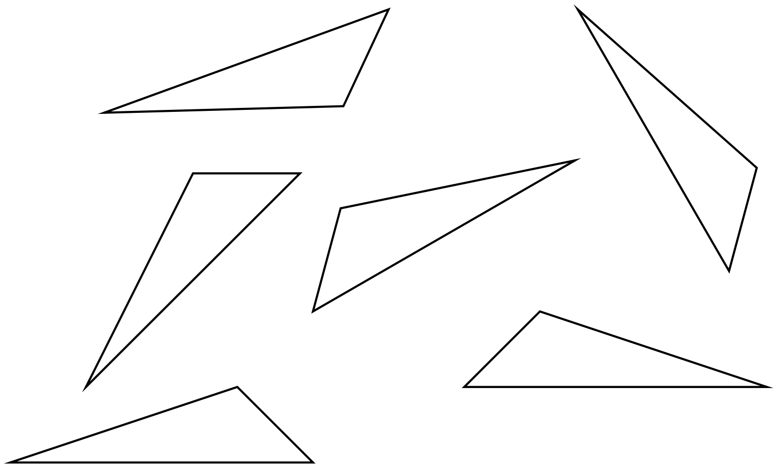
Da $\alpha + \beta = \pi/2$ ist, treten dabei an den Ecken keine Überschneidungen auf. Addiert man die Flächeninhalte der Dreiecke und des kleineren Quadrates in der Mitte mit Seitenlänge $(a - b)$, so ergibt sich

$$c^2 = 4\,\frac{ab}{2} + (a-b)^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2\,.$$

3.1.6 Kongruenz

Zwei geometrische Figuren heißen kongruent, wenn sie deckungsgleich sind, d.h. sie stimmen in ihrer Größe und Gestalt überein. Alle charakteristischen Größen, wie z.B. Fläche, Längen und Winkel sind gleich. Nur die Lage zweier kongruenter Figuren in der Ebene unterscheidet sich. Kongruente Figuren lassen sich also durch Parallelverschiebung, Spiegelung oder Drehung (oder mehrere dieser Bewegungen) ineinander überführen.

Zum Beispiel sind in nachfolgender Abbildung alle gezeigten Dreiecke kongruent.



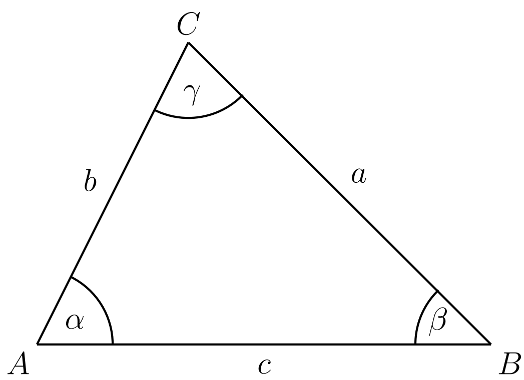
3.1.7 Kongruenzsätze im Dreieck

Für Dreiecke gibt es Kongruenzsätze, das heißt Bedingungen, die die Kongruenz von Dreiecken angeben. Im Folgenden steht W für Winkel und S für Seite beziehungsweise Seitenlänge.

1. Kongruenzsatz SSS: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in allen drei Seitenlängen übereinstimmen.
2. Kongruenzsatz SWS: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem von diesen eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.
3. Kongruenzsatz WSW: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen.
4. Kongruenzsatz SSW: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

3.1.8 Sinussatz

In einem Dreieck



verhalten sich die Längen der Seiten wie die Sinuswerte der gegenüberliegenden Winkel:

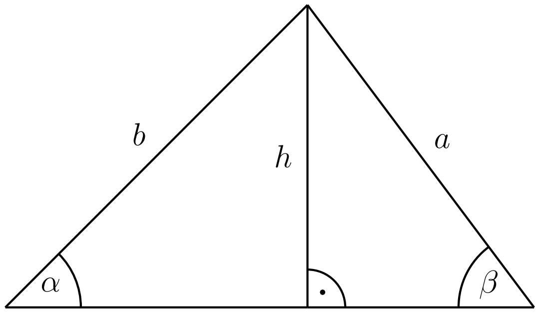
$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

oder

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c\,.$$

Beweis:

Zur Herleitung des Sinussatzes unterteilt man das Dreieck mit Hilfe der Höhen jeweils in zwei rechtwinklige Dreiecke.



Mit den Bezeichnungen in der Abbildung gilt

$$\sin\alpha = \frac{h}{b}\,, \quad \sin\beta = \frac{h}{a}\,.$$

Damit folgt

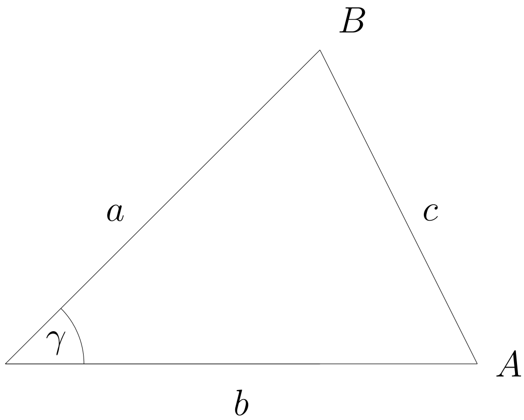
$$\sin\alpha : \sin\beta = \frac{h}{b} : \frac{h}{a} = a : b\,.$$

Die übrigen Verhältnisse können analog hergeleitet werden.

3.1.9 Kosinussatz

In einem Dreieck gilt für den der Seite $\overline{AB}$ gegenüberliegenden Winkel γ

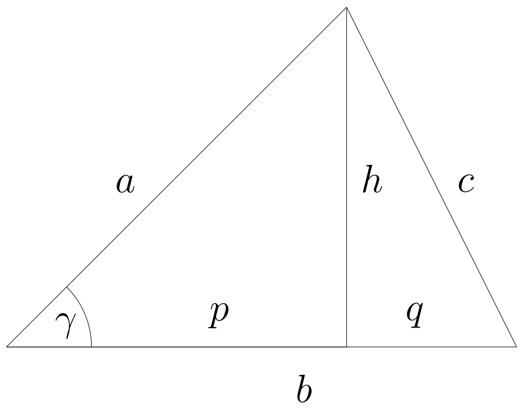
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,.$$



Als Spezialfall erhält man für $\gamma = \pi/2$ den Satz des Pythagoras: $c^2 = a^2 + b^2$.

Beweis:

Der Beweis benutzt den Satz des Pythagoras.



Es gilt

$$c^2 = h^2 + q^2, \quad h^2 = a^2 - p^2$$

sowie

$$q = b - p, \quad p = a\cos\gamma\,.$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} c^2 &= (a^2 - p^2) + (b-p)^2 \\ &= a^2 - p^2 + b^2 - 2b(a\cos\gamma) + p^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,, \end{aligned}$$

wie gewünscht.

3.2 Lineare Gleichungssysteme

3.2.1 Matrix

Unter einer $(m \times n)$-Matrix $(m, n \in \mathbb{N})$ über einem Körper K versteht man ein Rechteckschema

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Man bezeichnet $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ als i-ten Zeilen- und $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})^{\mathrm{t}}$ als j-ten Spaltenvektor von A. Speziell ist eine $(n \times 1)$-Matrix ein Spalten- und eine $(1 \times n)$-Matrix ein Zeilenvektor. Die Gesamtheit aller $(n \times m)$-Matrizen wird mit $K^{n\times m}$ bezeichnet; $\mathbb{R}^{n\times m}$ $(\mathbb{C}^{n\times m})$ bezeichnet die reellen (komplexen) Matrizen.

Beispiel:

Die folgenden Beispiele illustrieren verschiedene Matrixdimensionen.

$$\begin{pmatrix} 31 \\ 57 \\ 97 \end{pmatrix}, \quad (\mathrm{i}, 1+\mathrm{i}, -1, 3\mathrm{i})\,, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ \sqrt{3}+3\mathrm{i} & 7543 & 17 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \\ 31 & 32 \end{pmatrix}$$

Die ersten beiden Matrizen sind Spalten- bzw. Zeilenvektoren, d.h. Matrizen, bei denen eine der Dimensionen 1 ist. Rechts ist eine quadratische und eine rechteckige Matrix gezeigt.

3.2.2 Lineares Gleichungssystem

Ein lineares Gleichungssystem über einem Körper K hat die Form

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad Ax = b$$

mit einer Koeffizientenmatrix $A = (a_{i,j}) \in K^{m\times n}$, zu bestimmenden Unbekannten $x_j \in K$ und einer rechten Seite $b \in K^m$.

Das lineare Gleichungssystem nennt man homogen, wenn $b = 0$, sonst bezeichnet man es als inhomogen.

Für ein reelles ($K = \mathbb{R}$) oder komplexes ($K = \mathbb{C}$) lineares Gleichungssystem wird K nicht explizit angegeben. Welcher Fall vorliegt, ist meist aus dem Zusammenhang ersichtlich.

Besitzt das Lineare Gleichungssystem keine Lösung (im Allgemeinen für $m > n$), so bezeichnet man es als überbestimmt. Man spricht in diesem Fall auch von einem Ausgleichsproblem. Ein Lineares Gleichungssystem mit keiner eindeutigen Lösung (im Allgemeinen für $m < n$) nennt man unterbestimmt.

Beispiel:

Eine Funktion $f(x)$ kann aus Daten

$$(x_i, f_i), \quad i = 1, \ldots, n\,,$$

durch Interpolation näherungsweise rekonstruiert werden. Verwendet man einen linearen Ansatz

$$f(x) \approx p(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j p_j(x)$$

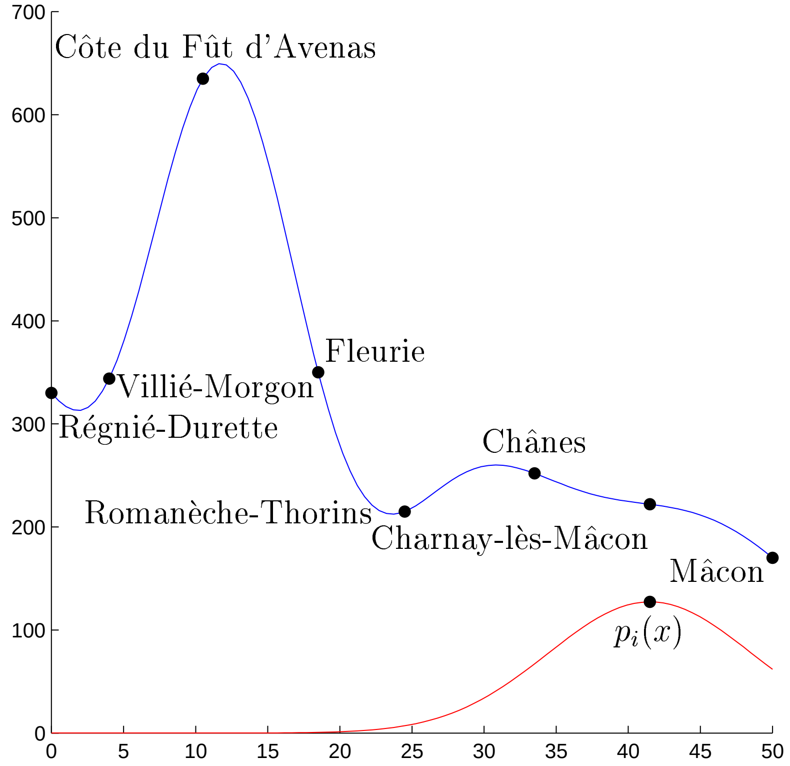
mit geeigneten Basisfunktionen p_j, so ergibt sich aus den Interpolationsbedingungen

$$f_i = p(x_i) = \sum_{j=1}^{n} c_j p_j(x_i), \quad i = 1, \ldots, n$$

das lineare Gleichungssystem für die c_j als

$$Ac = b\,,$$

mit $a_{i,j} = p_j(x_i)$ und $b_i = f_i$.



In dem abgebildeten Beispiel einer Tour-de-France-Etappe ist mit jedem Datenpunkt eine Exponentialfunktion

$$p_i(x) = \exp\left(-\left(\frac{x - x_i}{10}\right)^2\right)$$

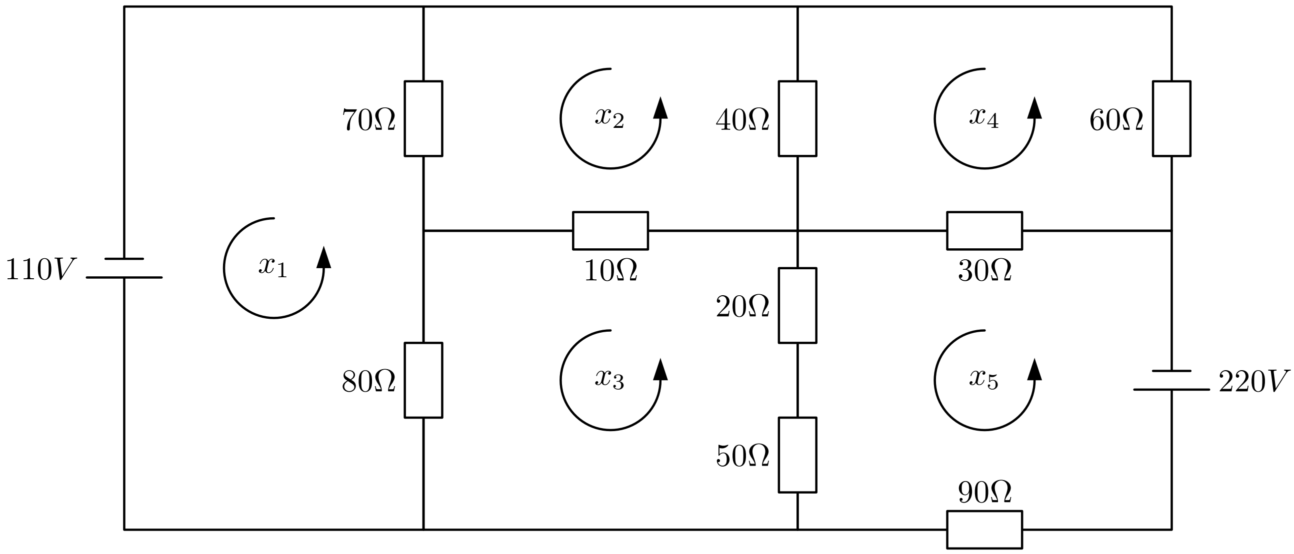
assoziiert. Durch das starke Abklingen von p_i für $|x - x_i| \to \infty$ wird erreicht, dass sich bei der Interpolation Änderungen in Datenpunkten vorwiegend lokal auswirken.

Beispiel:

Bezeichnet man in einem elektrischen Schaltkreis mit x_i die Kreisströme mit Fließrichtung entgegen dem Uhrzeigersinn, mit $R_{i,j}$ den gemeinsamen Widerstand der i-ten und j-ten Schleife und mit U_i die angelegten Spannungen, so ergibt sich aus dem Ohmschen und dem Kirchhoffschen Gesetz das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{i \sim 0} x_i R_{i,0} + \sum_{i \sim j} (x_i - x_j) R_{i,j} = U_i .$$

Dabei bedeutet $i \sim j$, dass die i-te und j-te Schleife einen gemeinsamen Widerstand haben. $x_i - x_j$ ist der Strom durch diesen Widerstand. Mit $R_{i,0}$, $i \sim 0$, werden Widerstände bezeichnet, die nur in der i-ten Schleife liegen.



Beispielsweise erhält man für den abgebildeten Schaltkreis das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 150 & -70 & -80 & 0 & 0 \\ -70 & 120 & -10 & -40 & 0 \\ -80 & -10 & 160 & 0 & -70 \\ 0 & -40 & 0 & 130 & -30 \\ 0 & 0 & -70 & -30 & 190 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -220 \end{pmatrix}.$$

Die Koeffizientenmatrix enthält in der Diagonale jeweils die Summe der zu einer Schleife gehörigen Widerstände und in Position (i, j) den negativen gemeinsamen Widerstand der Schleifen i und j. Die Lösung für das betrachtete Beispiel ist

$$x \approx \begin{pmatrix} 1.0157 \\ 0.5641 \\ 0.0358 \\ -0.0940 \\ -1.1595 \end{pmatrix}.$$

3.2.3 Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

Die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems über einem Körper K,

$$Ax = 0,$$

mit einer $m \times n$ Koeffizientenmatrix A ist ein Unterraum U von K^n.
Besitzt das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$Ax = b$$

eine Lösung v, so gilt für die allgemeine Lösung

$$x \in v + U\,,$$

d.h. die Lösungsmenge ist ein affiner Unterraum von K^n. Insbesondere kann also ein inhomogenes lineares Gleichungssystem entweder keine, eine ($U = \{0\}$) oder unendlich viele ($\dim U > 0$) Lösungen besitzen.

Beweis:

Sind x, y Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems und $\lambda \in K$, so erhält man

$$A(x+y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$$

sowie

$$A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda 0 = 0\,,$$

d.h. die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems bildet einen Unterraum U. Falls v eine Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems ist und $u \in U$, so ist $x = v+u$ wegen

$$Ax = A(v+u) = Av + Au = b + 0 = b$$

ebenfalls eine Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems. Umgekehrt ist mit zwei Lösungen v und w des inhomogenen linearen Gleichungssystems die Differenz $v - w$ wegen

$$A(v-w) = Av - Aw = b - b = 0$$

eine Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems.
Man erhält somit alle Lösungen eines inhomogenen linearen Gleichungssystems, indem man für eine beliebige Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems die Summen mit allen Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems bildet.

Beispiel:

Die folgenden einfachen Fälle veranschaulichen die verschiedenen Typen von linearen Gleichungssystemen:
(i) Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 60 \end{pmatrix}$$

besitzt die eindeutige Lösung $x_1 = 8$, $x_2 = 1$.
(ii) Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

besitzt keine eindeutige Lösung. Wählt man $x_3 = t$ beliebig, so erhält man $x_2 = 2t$, $x_1 = 2$ als Lösung.
(iii) Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

besitzt keine Lösung. Die letzte Zeile liefert $x_2 = 4$, setzt man dies aber in die anderen Zeilen ein, so erhält man aus der ersten Zeile $x_1 = 2$, aus der zweiten hingegen $x_1 = 1$.

3.2.4 Elimination von Unbekannten bei linearen Gleichungssystemen

Eine lineare Gleichung

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots = f$$

mit $a_1 \neq 0$ lässt sich nach x_1 auflösen:

$$x_1 = (f - a_2x_2 - \cdots)/a_1 \,.$$

Bei linearen Gleichungssystemen kann damit die Anzahl der Unbekannten sukzessive reduziert werden, indem man die durch Elimination gewonnenen Ausdrücke in die anderen Gleichungen einsetzt.

Beispiel:

Für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} 2x & - & 3y & = & 1 \\ 5x & - & 4y & = & 6 \end{array}$$

erhält man aus der ersten Gleichung

$$x = \frac{1+3y}{2}$$

und nach Einsetzen in die zweite Gleichung

$$5 \cdot \frac{1+3y}{2} - 4y = 6 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7}{2}y + \frac{5}{2} = 6 \quad \Leftrightarrow \quad y = 1\,.$$

Einsetzen in den Ausdruck für x ergibt schließlich

$$x = \frac{1+3\cdot 1}{2} = 2\,.$$

3.2.5 Gauß-Transformation

Folgende Operationen lassen die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems unverändert:

- Vertauschung zweier Gleichungen,
- Multiplikation einer Gleichung mit einem Faktor $\neq 0$,
- Subtraktion einer Gleichung von einer anderen Gleichung.

Durch Kombination der letzten beiden Operationen ist auch die Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile eine zulässige Operation.
Mit Hilfe dieser sogenannten Gauß-Transformation lassen sich sukzessive Unbekannte eliminieren und ein lineares Gleichungssystem auf Dreiecksform transformieren und dann durch Rückwärtseinsetzen lösen.

Beispiel:

Um das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} & - & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 7 \\ -8x_1 & - & 4x_2 & & & = & -12 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 6 \end{array}$$

mit Gauß-Transformationen auf Dreiecksform zu bringen, werden zunächst die erste und die dritte Zeile vertauscht:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ -8x_1 & - & 4x_2 & & & = & -12 \\ & - & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 7\,. \end{array}$$

Durch Addition der mit dem Faktor 2 multiplizierten ersten Gleichung zur zweiten Gleichung erhält man

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ & & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ & - & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 7\,. \end{array}$$

Addition der zweiten Gleichung zur dritten Gleichung ergibt schließlich die Dreiecksform

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ & & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ & & & & 7x_3 & = & 7\,. \end{array}$$

Durch Rückwärtseinsetzen können die Gleichungen nun sukzessive gelöst werden. Aus Gleichung 3 folgt

$$x_3 = 1.$$

Eingesetzt in Gleichung 2 erhält man

$$2x_2 + 2 \cdot 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = -1.$$

Schließlich liefert die Substitution der berechneten Unbekannten in die erste Gleichung

$$4x_1 + 3(-1) + 1 = 6 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = (6 + 3 - 1)/4 = 2.$$

3.2.6 Gauß-Elimination

Durch Gauß-Transformationen lässt sich ein lineares Gleichungssystem mit invertierbarer $(n \times n)$-Koeffizientenmatrix A in maximal $n-1$ Schritten auf obere Dreiecksform bringen. Dazu werden sukzessive die Koeffizienten unterhalb der Diagonalen annulliert, d.h. nach $\ell-1$ Schritten hat das lineare Gleichungssystem die Form

$$\begin{array}{ccccccccccccc} a_{1,1} & x_1 & + & a_{1,2} & x_2 & + & \ldots & + & a_{1,\ell} & x_\ell & + & \ldots & + & a_{1,n} & x_n & = & b_1 \\ & & & a_{2,2} & x_2 & + & \ldots & + & a_{2,\ell} & x_\ell & + & \ldots & + & a_{2,n} & x_n & = & b_2 \\ & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ & & & & & & & & a_{\ell,\ell} & x_\ell & + & \ldots & + & a_{\ell,n} & x_n & = & b_\ell \\ & & & & & & & & a_{\ell+1,\ell} & x_\ell & + & \ldots & + & a_{\ell+1,n} & x_n & = & b_{\ell+1} \\ & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ & & & & & & & & a_{n,\ell} & x_\ell & + & \ldots & + & a_{n,n} & x_n & = & b_n \end{array}$$

Im einzelnen verläuft der ℓ-te Eliminationsschritt wie folgt.

- Ist das ℓ-te Diagonalelement, das so genannte Pivot-Element, Null, so wird die ℓ-te mit einer der folgenden Gleichungen vertauscht, so dass $a_{\ell,\ell} \neq 0$ gilt.

- Für $i > \ell$ wird von der i-ten Gleichung ein Vielfaches der ℓ-ten Gleichung subtrahiert, so daß $a_{i,\ell}$ Null wird:

  $$a_{i,j} \leftarrow a_{i,j} - q_i a_{\ell,j}, \quad b_i \leftarrow b_i - q_i b_\ell \quad (q_i = a_{i,\ell}/a_{\ell,\ell})$$

  für $j \geq \ell$.

Beispiel:

Für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

läuft der Gauß-Algorithmus folgendermaßen ab:

- Vertauschung der ersten und zweiten Zeile:

  $$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- (3.Zeile) - (1.Zeile) und (4.Zeile) - 2·(1.Zeile):

  $$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 2·(3.Zeile) + (2.Zeile):

  $$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 3·(4.Zeile) - (3.Zeile):

  $$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3.2.7 Rückwärts-Einsetzen

Bei einem linearen Gleichungssystem in oberer Dreiecksform,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} r_{1,1} & \cdots & r_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{n,n} \end{pmatrix}}_{R} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

mit $\det R = r_{1,1} \cdots r_{n,n} \neq 0$ können die Unbekannten $x_n, \ldots, x_1$ nacheinander bestimmt werden:

$$r_{n,n} x_n = b_n \to x_n = b_n / r_{n,n}$$

und, für $\ell = n-1, \ldots 1$,

$$r_{\ell,\ell} x_\ell + \cdots + r_{\ell,n} x_n = b_\ell, \to x_\ell = (b_\ell - r_{\ell,\ell+1} x_{\ell+1} - \cdots - r_{\ell,n} x_n) / r_{\ell,\ell}\,.$$

Dabei werden jeweils die schon berechneten Werte $x_{\ell+1}, \ldots, x_n$ verwendet.
Bei einem linearen Gleichungssystem mit einer unteren Dreiecksmatrix kann man analog nacheinander $x_1, \ldots, x_n$ bestimmen.
(Online-Version enthält Download, siehe Anhang A)

Beispiel:

Für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ & & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ & & & & 7x_3 & = & 7 \end{array}$$

in Dreiecksform erhält man durch Rückwärtseinsetzen die Lösung

$$\begin{array}{rcl} x_3 & = & 1 \\ x_2 & = & (0-2)/2 = -1 \\ x_1 & = & (6 - 3(-1) - 1) = 2\,. \end{array}$$

3.2.8 Zeilenstufenform

Ein lineares Gleichungssystem mit einer $(m \times n)$-Koeffizientenmatrix lässt sich mit Gauß-Transformationen auf Zeilenstufenform (Echelon-Form) transformieren:

$$Ax = b \to \underbrace{\begin{pmatrix} 0\ldots0 & p_1 & *\ldots* & & & & & \\ & 0 & 0\ldots0 & p_2 & *\ldots* & & & \\ & & & 0 & 0\ldots0 & p_3 & *\ldots* & \\ & & & & & & \ddots & \end{pmatrix}}_{A'} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}.$$

Dabei sind die so genannten Pivots

$$p_1 = a'_{1,j_1}, \ldots, p_k = a'_{k,j_k}, \quad k \leq m, \quad 1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n\,,$$

ungleich Null und k ist der Rang von A.
Der k-te Transformationsschritt verläuft wie folgt:

1. Ein von Null verschiedenes Matrixelement p_k mit kleinstem Spaltenindex und Zeilenindex $\geq k$ wird als Pivotelement gewählt und durch Zeilenvertauschung in die Position (k, j_k) gebracht.

   Existiert kein Pivotelement, ist die Zeilenstufenform erreicht.

2. Durch Subtraktion von Vielfachen der Zeile k werden die Matrixelemente unterhalb des Pivots annulliert.

Beispiel:

Für die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 6 & -7 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

läuft die Transformation auf Zeilenstufenform folgendermaßen ab:

- Vertauschung der ersten und zweiten Zeile:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 6 & -7 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

- (3.Zeile) - 2·(1.Zeile) und (4.Zeile) + (1.Zeile):

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

- (3.Zeile) - (2.Zeile), (4.Zeile) - (2.Zeile) und (5.Zeile) - (2.Zeile):

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (4. Zeile) - $\frac{1}{2}$· (3.Zeile):

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Zeilenstufenform hat $3 = \operatorname{Rang} A$ nicht-triviale Zeilen mit den Pivotelementen $p_1 = 2$, $p_2 = 1$ und $p_3 = -10$.

3.2.9 Lösung eines linearen Gleichungssystems in Zeilenstufenform

Ein lineares Gleichungssystem $Dx = c$ in Zeilenstufenform,

$$\begin{pmatrix} 0\ldots 0 & p_1 & *\ldots * & & & & & \\ & & 0 & 0\ldots 0 & p_2 & *\ldots * & & \\ & & & & 0 & 0\ldots 0 & p_3 & *\ldots * \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

mit Pivots $p_1, \ldots, p_k$ ist genau dann lösbar, wenn $c_{k+1} = \cdots = c_m = 0$. Die Lösung ist eindeutig, falls $k = n$. Für $k < n$ gibt es $n - k$ linear unabhängige Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems ($c_i = 0$). Die Unbekannten, die den Spalten ohne Pivots entsprechen, können frei gewählt werden.

Beispiel:

Im Folgenden werden mehrere typische Fälle diskutiert.

- $k = n = 4$
$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$
Durch Rückwärts-Einsetzen erhält man rekursiv die eindeutige Lösung
$$x = (1, -1, -1, 1)^{\mathrm{t}}.$$

- $3 = k < n = 5$, $c_4 \neq 0$
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$
In der letzten Zeile ergibt sich $0 \cdot x = 1$, damit hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung.

- $3 = k < n = 5$, $c_4 = 0$
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Da $c_{k+1} = 0$, ist das lineare Gleichungssystem $Dx = c$ lösbar. Wegen Rang $D = 3 = n - 2$ ist die Lösung x jedoch nicht eindeutig. Es existieren 2 linear unabhängige Lösungen v_i des homogenen Systems und die allgemeine Lösung hat die Form
$$x = x_s + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2\,, \alpha_j \in \mathbb{R}$$

mit x_s einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems.

Die Vektoren v_i bestimmt man durch kanonische Wahl der nicht zu den Pivot-Spalten gehörigen Unbekannten und berechnet die restlichen Koeffizienten über das homogene System:

$$(x_3 = 1, x_5 = 0) \to v_1 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (x_3 = 0, x_5 = 1) \to v_2 = \begin{pmatrix} -7/4 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eine spezielle Lösung

$$x_s = \begin{pmatrix} 5/4 \\ -6 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erhält man durch Setzen von $x_3 = x_5 = 0$.

3.2.10 Lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten

Ein lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten x und y hat die Form

$$\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & f \\ cx & + & dy & = & g\,, \end{array}$$

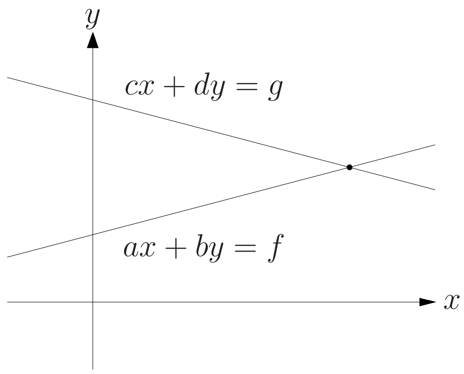
wobei in jeder Gleichung mindestens einer der Koeffizienten $a, \ldots, d$ ungleich Null ist. Es ist genau dann für alle rechten Seiten (f, g) eindeutig lösbar, wenn

$$\Delta = ad - bc \neq 0\,.$$

Die Lösung

$$x = \frac{df - bg}{\Delta}\,, \qquad y = \frac{ag - cf}{\Delta}$$

lässt sich als Schnittpunkt der durch die beiden Gleichungen beschriebenen Geraden interpretieren.



Ist $\Delta = 0$, so sind die Geraden parallel. In diesem Fall existiert entweder keine Lösung oder, wenn die Geraden zusammenfallen, unendlich viele Lösungen.

Beweis:

Multipliziert man die erste Gleichung mit c und die zweite mit a, so folgt

$$cax + cby = cf\,, \qquad acx + ady = ag\,.$$

Nach Subtraktion ist

$$\underbrace{(ad - bc)}_{\Delta}\, y = ag - cf$$

und man erhält die gewünschte Formel für y. Die Formel für x beweist man analog.
Für $\Delta = 0$ gilt

$$c = \lambda a\,, \qquad d = \lambda b$$

mit einem $\lambda \neq 0$. In diesem Fall haben die Geraden die gleiche Steigung, sind also parallel. Jenachdem, ob a oder b ungleich Null ist, kann $\lambda = \frac{c}{a}$ oder $\lambda = \frac{b}{d}$ gesetzt werden. Offensichtlich kann das Gleichungssystem nur dann Lösungen besitzen, wenn $g = \lambda f$, d.h. wenn die Geraden identisch sind.

Beispiel:

Als Beispiel wird das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ 5x - 4y &= 6 \end{aligned}$$

betrachtet. Mit

$$\Delta = 2 \cdot (-4) - 3 \cdot 5 = -23$$

erhält man

$$x = \frac{(-4) \cdot 7 - 3 \cdot 6}{-\Delta} = 2\,, \qquad y = \frac{2 \cdot 6 - 5 \cdot 7}{-\Delta} = 1\,.$$

Alternativ kann man auch die erste Gleichung nach y auflösen,

$$y = \frac{7 - 2x}{3} = \frac{7}{3} - \frac{2}{3}x,$$

und in die zweite einsetzen:

$$5x - 4(\frac{7}{3} - \frac{2}{3}x) = 5x + \frac{8}{3}x - \frac{28}{3} = 6\,.$$

Damit folgt ebenfalls

$$x = 2$$

und aus der ersten Gleichung $y = 1$.

Beispiel:

Als Beispiel wird das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x - 2y &= -1 \\ -2x + 4y &= t \end{aligned}$$

mit einem Parameter t betrachtet.
Da

$$\Delta = 1 \cdot 4 - (-2) \cdot (-2) = 0$$

sind die den Gleichungen entsprechenden Geraden parallel:

$$y = \frac{1}{2}x + b_k$$

mit $b_1 = \frac{1}{2}$ und $b_2 = \frac{t}{4}$. Lösungen existieren nur dann, wenn die zweite Gleichung ein Vielfaches der ersten ist, also falls

$$t = (-1) \cdot (-2) = 2\,.$$

In diesem Fall sind die Gleichungen äquivalent, es muss also nur eine gelöst werden. Wählt man die erste Gleichung, so kann x beliebig gewählt werden und

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\,.$$

Die Lösungsmenge ist also eine Gerade durch $(0, \frac{1}{2})$ mit Steigung $\frac{1}{2}$.

3.2.11 Lineares Gleichungssystem mit drei Unbekannten

Ein lineares Gleichungssystem mit drei Unbekannten x_1, x_2, x_3 hat die Form

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & f_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & f_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & f_3\,, \end{array}$$

wobei in jeder Gleichung mindestens einer der Koeffizienten $a_{k,1}, a_{k,2}$ oder $a_{k,3}$ ungleich Null ist. Die Menge aller Lösungen des Gleichungssystems lässt sich geometrisch als die Schnittmenge der drei Ebenen interpretieren, die durch die drei Gleichungen definiert sind. Dabei können die folgenden Fälle auftreten.

- Genau eine Lösung: Die drei Ebenen schneiden sich in genau einem Punkt.
- Keine Lösung: Die drei Ebenen besitzen keinen gemeinsamen Punkt.
- Unendlich viele Lösungen: Alle drei Ebenen schneiden sich in einer Geraden oder sind identisch.

Das lineare Gleichungssystem lässt sich zum Beispiel durch das Eliminationsverfahren oder der Gauß-Transformation mit anschließendem Rückwärtseinsetzen lösen.

3.3 Vektorräume

3.3.1 Vektorraum der n-Tupel

Für einen Körper K bilden die n-Tupel oder n-Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad a_i \in K$$

den K-Vektorraum K^n mit der komponentenweise definierten Addition und Skalarmultiplikation, d. h.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

und

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n \end{pmatrix}$$

für $a_i, b_i, \lambda \in K$.
Oft ist es bequem, n-Tupel als Zeilenvektor

$$a^{\mathrm{t}} = (a_1, \ldots, a_n) \quad \text{bzw.} \quad a = (a_1, \ldots, a_n)^{\mathrm{t}}$$

zu schreiben. Durch das Symbol „t" der Transposition wird von der Standardkonvention als Spaltenvektor unterschieden.

3.3.2 Unterraum

Eine nichtleere Teilmenge U eines K-Vektorraums V, die mit der in V definierten Addition und Skalarmultiplikation selbst einen Vektorraum bildet, nennt man einen Unterraum von V.
Unterräume U werden oft durch Bedingungen an die Elemente von V definiert:

$$U = \{v \in V : A(v)\},$$

wobei A eine Aussage bezeichnet, die für $v \in V$ erfüllt sein muss.
Um zu prüfen, ob es sich bei einer nichtleeren Teilmenge U von V um einen Unterraum handelt, genügt es zu zeigen, dass U bzgl. der Addition und Skalarmultiplikation abgeschlossen ist:

$$\begin{aligned} u, v \in U &\implies u + v \in U \\ \lambda \in K, u \in U &\implies \lambda \cdot u \in U\,. \end{aligned}$$

Beispiel:

Unterräume entstehen oft durch Spezifizieren zusätzlicher Eigenschaften. Betrachtet man den Vektorraum der reellen Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,$$

so bilden beispielsweise die geraden Funktionen ($f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$) einen Unterraum. Weitere Beispiele bzw. Gegenbeispiele sind in der folgenden Tabelle angegeben:

Eigenschaft	Unterraum
ungerade	ja
beschränkt	ja
monoton	nein
stetig	ja
positiv	nein
linear	ja

Beispiel:

Für jeden Vektor $d \neq 0$ eines K-Vektorraums bildet die durch 0 verlaufende Gerade

$$v = \lambda d, \quad \lambda \in K$$

einen Unterraum.
Allerdings ist eine Gerade, die nicht durch 0 verläuft, kein Unterraum. Beispielsweise liegt $(1,0)^{\mathrm{t}}$ auf der Geraden

$$g : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

$(2,0)^{\mathrm{t}}$ jedoch nicht.

3.3.3 Linearkombination

Für Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_m$ in einem K-Vektorraum V bezeichnet man

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \cdots + \lambda_m \cdot v_m = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot v_i$$

mit Skalaren $\lambda_i \in K$ als Linearkombination der v_i.

Allgemeiner versteht man für $W \subset V$ unter einer Linearkombination aus W eine Linearkombination aus endlich vielen Vektoren von W.

Beispiel:

Der Vektor

$$v = (1,2,3)^{\mathrm{t}}$$

ist eine Linearkombination der Vektoren

$$v_1 = (3,4,5)^{\mathrm{t}},\ v_2 = (1,1,1)^{\mathrm{t}},$$

denn

$$v = v_1 - 2v_2\,.$$

Hingegen ist

$$v = (1,0)^{\mathrm{t}}$$

keine Linearkombination der Vektoren

$$v_1 = (0,1)^{\mathrm{t}},\ v_2 = (0,2)^{\mathrm{t}},$$

denn jede Linearkombination von v_1 und v_2 hat die Form $(0,*)^\mathrm{t}$.
Schließlich kann

$$v = (0,0,0,0)^\mathrm{t}$$

auf verschiedene Weise als eine Linearkombination der Vektoren

$$v_1 = (1,1,0,0)^\mathrm{t},\ v_2 = (0,2,2,0)^\mathrm{t},\ v_3 = (0,0,3,3)^\mathrm{t},\ v_4 = (4,0,0,4)^\mathrm{t}$$

dargestellt werden:

$$v = \lambda(12v_1 - 6v_2 + 4v_3 - 3v_4)$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

3.3.4 Lineare Hülle

Die Menge aller Linearkombinationen von Vektoren $v_1,\ldots,v_n$ eines K-Vektorraums V nennt man die lineare Hülle der v_i und bezeichnet sie mit

$$\mathrm{span}(v_1,\ldots,v_n) = \{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot v_i : \lambda_i \in K\}.$$

Entsprechend definiert man für eine Menge U von Vektoren $\mathrm{span}(U)$ als die Menge aller Linearkombinationen von Vektoren aus U.
Für jede Teilmenge $U \in V$ ist $\mathrm{span}(U)$ ein Unterraum von V.

Beispiel:

Betrachtet man zwei verschiedene Ursprungsgeraden g_1 und g_2 im $\mathbb{R}^3$, z. B.

$$g_1 : x = \lambda_1(1,0,0)^\mathrm{t},\ g_2 : x = \lambda_2(0,1,0)^\mathrm{t}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R},$$

so sind diese jeweils die lineare Hülle der Richtungsvektoren; hier

$$v_1 = (1,0,0)^\mathrm{t},\ v_2 = (0,1,0)^\mathrm{t}\,.$$

Die lineare Hülle der Vektoren v_1 und v_2 ist dann die Ebene $E = \mathrm{span}(v_1,v_2)$, die die Geraden g_1 und g_2 enthält; hier also

$$E : x = \lambda_1(1,0,0)^\mathrm{t} + \lambda_2(0,1,0)^\mathrm{t}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}\ ,$$

bzw. $E = \{x :\ x_3 = 0\}$.

3.3.5 Lineare Unabhängigkeit

Vektoren $v_1,\ldots,v_m$ heißen linear abhängig, wenn es Skalare $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ gibt mit

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0$$

und mindestens einem $\alpha_i \neq 0$. Andernfalls heißen sie linear unabhängig.
Allgemeiner bezeichnet man eine Menge M von Vektoren als linear unabhängig, wenn jede endliche Teilmenge von M aus linear unabhängigen Vektoren besteht. Andernfalls heißt M linear abhängig.

Erläuterung:

Man beachte, dass im Sinne der linearen Algebra zwar unendliche Mengen M zugelassen sind, aber nur endliche Linearkombinationen. So ist z. B. im Vektorraum der Folgen die Menge

$$e = (1, 1, \ldots)^{\mathrm{t}},\ e_1 = (1, 0, 0, \ldots)^{\mathrm{t}},\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots)^{\mathrm{t}},\ \ldots$$

linear unabhängig, obwohl

$$e = \sum_{n\in\mathbb{N}} e_n\,.$$

Es gibt keine endliche Darstellung der konstanten Folge e mit den kanonischen Einheitsvektoren.

Beispiel:

Zwei Vektoren im $\mathbb{R}^2$ sind genau dann linear unabhängig, wenn keiner der beiden ein Vielfaches des anderen ist. So sind z. B. die Vektoren $(1, 0)^{\mathrm{t}}$ und $(1, 1)^{\mathrm{t}}$ linear unabhängig, denn der Ansatz

$$\alpha(1, 0)^{\mathrm{t}} + \beta(1, 1)^{\mathrm{t}} = (0, 0)^{\mathrm{t}}$$

liefert

$$\beta = \alpha = 0\,.$$

Hingegen sind die Vektoren $(0, 0)^{\mathrm{t}}$ und $(2, 3)^{\mathrm{t}}$ linear abhängig, denn

$$(0, 0)^{\mathrm{t}} = 0(2, 3)^{\mathrm{t}}$$

bzw.

$$1(0, 0)^{\mathrm{t}} + 0(2, 3)^{\mathrm{t}} = (0, 0)^{\mathrm{t}}\,;$$

es existiert also eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors.
Drei Vektoren u, v, w im $\mathbb{R}^2$ sind immer linear abhängig, denn der Ansatz

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$$

führt auf ein unterbestimmtes, homogenes lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1 &= 0 \\ \alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma w_2 &= 0 \end{aligned}$$

für α, β, γ, das immer eine nichttriviale Lösung besitzt.

Beispiel:

Wie im Zweidimensionalen sind zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ linear abhängig, wenn sie parallel sind, d.h. wenn ein Vektor ein Vielfaches des anderen ist.
Drei Vektoren sind linear abhängig, wenn zwei Vektoren parallel sind oder wenn ein Vektor in der von den beiden anderen Vektoren aufgespannten Ebene liegt. Beispielsweise gilt für

$$u = (1, 2, -3)^{\mathrm{t}},\ v = (4, -6, 2)^{\mathrm{t}},\ w = (-9, 3, 6)^{\mathrm{t}}$$

$6u + 3v + 2w = (0,0,0)^{\mathrm{t}}$; die Vektoren sind also linear abhängig.
Definitionsgemäß ist der Test für lineare Abhängigkeit äquivalent zu einem homogenen linearen Gleichungssystem

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für die Skalare λ_i. Dies zeigt insbesondere, dass vier Vektoren im $\mathbb{R}^3$ immer linear abhängig sind.

3.3.6 Basis

Eine Teilmenge B eines Vektorraumes V heißt eine Basis von V, wenn B linear unabhängig und ein Erzeugendensystem von V ist, d.h. wenn jeder Vektor $v \in V$ eine eindeutige Darstellung als endliche Linearkombination

$$v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i$$

mit $b_i \in B$ besitzt.
Ist B endlich ($|B| = n$), so lässt sich jeder Vektor durch seine Koordinaten bzgl. der Basis beschreiben:

$$v \leftrightarrow v_B = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^{\mathrm{t}} .$$

Erläuterung:

Durch die Koordinatendarstellung

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \leftrightarrow v_B = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^{\mathrm{t}} ,$$

den so genannten kanonischen Isomorphismus, kann man einen endlich dimensionalen K-Vektorraum V mit dem Vektorraum K^n der n-Tupel identifizieren. Insbesondere kann man sich also beim Studium reeller und komplexer Vektorräume mit endlicher Basis auf die Prototypen $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ beschränken.
Wie man am Beispiel des Vektorraums der Polynome sieht, muss ein Vektorraum keine endliche Basis besitzen. Es werden jedoch im Rahmen der linearen Algebra nur endliche Linearkombinationen betrachtet. Dies impliziert, dass die Folgen

$$e_1 = (1,0,0,\ldots)^{\mathrm{t}},\ e_2 = (0,1,0,\ldots)^{\mathrm{t}},\ \ldots$$

keine Basis für den Vektorraum der Folgen bilden. Das Betrachten unendlicher Linearkombinationen, wie sie etwa in Fourier-Reihen auftreten, liegt auf der Hand, erfordert jedoch einen Konvergenzbegriff, also mehr als nur die bloße Vektorraumstruktur.

3.3.7 Dimension

Besitzt ein Vektorraum V eine endliche Basis $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, so ist die Anzahl der Basisvektoren eindeutig bestimmt und wird als Dimension von V bezeichnet:

$$n = \dim V .$$

Man setzt $\dim V = 0$ für $V = \{0\}$ und $\dim V = \infty$ für einen Vektorraum ohne endliche Basis. Nach dem allgemeinen Basissatz besitzt jeder Vektorraum eine Basis.

Beweis:

Um zu zeigen, dass die Dimension im endlichen Fall eindeutig bestimmt ist, genügt es, die folgende Aussage zu beweisen:
Hat ein Vektorraum eine n-elementige Basis

$$b_1, \ldots, b_n\,,$$

so sind $n+1$ Vektoren $v_1, \ldots, v_{n+1}$ (und damit auch mehr als $n+1$ Vektoren) linear abhängig. Würden nämlich zwei Basen mit unterschiedlich vielen Vektoren existieren, erhält man einen Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der Basisvektoren.
Die obige Behauptung kann durch Induktion nach n bewiesen werden.
Für den Induktionsschritt (der Induktionsanfang $n = 1$ ist trivial) betrachtet man die Basisdarstellung der Vektoren v_i:

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j} b_j, \quad i = 1, \ldots, n+1\,.$$

Gilt

$$\gamma_{i,1} = \cdots = \gamma_{i,n} = 0\,,$$

so ist $v_i = 0$, und die lineare Abhängigkeit ist bereits gezeigt. Also kann man durch geeignete Nummerierung annehmen, dass $\gamma_{n+1,n} \neq 0$. Ausgehend von obiger Gleichung definiert man nun Vektoren, die sich als Linearkombination der $n-1$ Vektoren $b_1, \ldots, b_{n-1}$ darstellen lassen:

$$v_i' = v_i - \frac{\gamma_{i,n}}{\gamma_{n+1,n}} v_{n+1}, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Dass der Koeffizient von b_n verschwindet, ist leicht zu sehen. Da

$$v_1', \ldots, v_n' \in V' = \operatorname{span}\{b_1, \ldots, b_{n-1}\}\,,$$

kann man die Induktionsvoraussetzung anwenden und erhält eine nichttriviale Linearkombination

$$\lambda_1 v_1' + \cdots + \lambda_n v_n' = 0\,.$$

Nach Umformung ergibt sich eine Linearkombination der v_i, also die behauptete lineare Abhängigkeit.

3.3.8 Lineare Abbildung

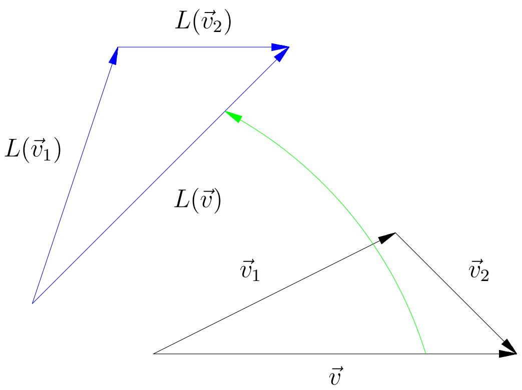
Eine Abbildung $L : V \longmapsto W$ zwischen K-Vektorräumen V und W heißt linear, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

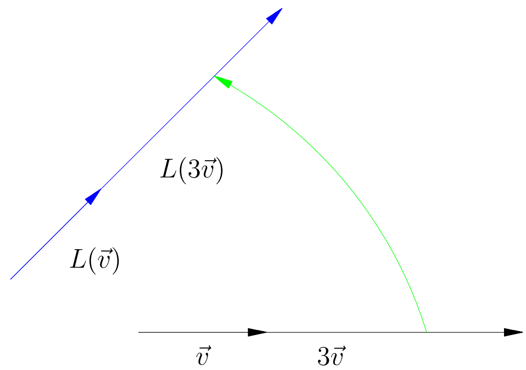
- Additivität:
  $L(u+v) = L(u) + L(v)$
- Homogenität:
  $L(\lambda v) = \lambda L(v)$

Dabei sind $u, v \in V$ und $\lambda \in K$ beliebige Vektoren bzw. Skalare. Insbesondere gilt $L(0_V) = 0_W$ und $L(-v) = -L(v)$.

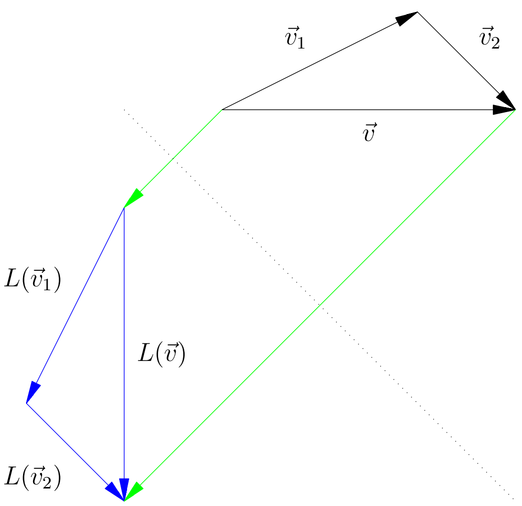
Beispiel:

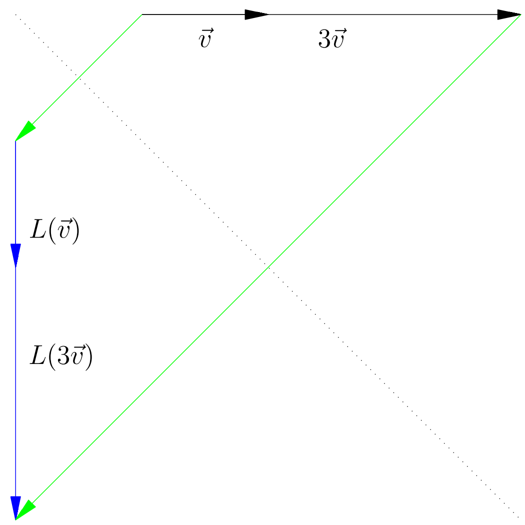
Wie in der folgenden Abbildung illustriert ist, ist eine Drehung linear.





Die Summe $v = v_1 + v_2$ bildet mit den beiden Vektoren v_i ein Dreieck, dessen Form durch die Drehung unverändert bleibt, d.h., die Summe kann vor oder nach der Drehung gebildet werden. Dass eine Streckung um einen Faktor λ mit der Drehung vertauschbar ist, ist unmittelbar ersichtlich.
Analog lässt sich veranschaulichen, dass auch eine Spiegelung linear ist.





Eine Verschiebung von Punkten in der Ebene ist jedoch nicht linear. Weder die Additivität noch die Homogenität ist erfüllt. Für

$$T: \ (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + 1, x_2)$$

und

$$v_1 = (1,0),\ v_2 = (0,1),\ \lambda = 2$$

gilt beispielsweise

$$\begin{aligned} T(v_1 + v_2) = (2,1) \quad &\neq \quad (3,1) = T(v_1) + T(v_2) \\ T(\lambda v) = (3,0) \quad &\neq \quad (4,0) = \lambda T(v)\,. \end{aligned}$$

Beispiel:

Die folgende Tabelle zeigt einige Beispiele von Abbildungen reeller Funktionen. Dabei ist jeweils angegeben, welche der beiden Bedingungen für Linearität erfüllt sind.

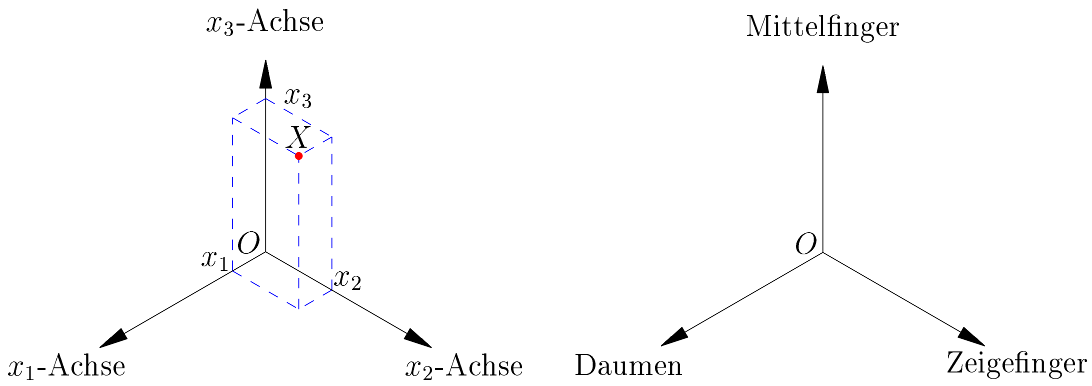
Abbildung	additiv	homogen
$f \mapsto f'$	X	X
$f \mapsto \lvert f \rvert$	–	–
$f \mapsto \int_0^1 f$	X	X
$f \mapsto \max f$	–	–
$f \mapsto f(0)$	X	X
$f \mapsto (\max f + \min f)/2$	–	X

Ein Beispiel für eine Abbildung, die additiv aber nicht homogen ist, ist die Abbildung T, die einer komplexwertigen Funktion ihren Realteil zuweist. Hier gilt $T(\mathrm{i}f) \neq \mathrm{i}T(f)$.

3.4 Vektoren

3.4.1 Kartesisches Koordinatensystem in der Ebene und im Raum

Ein räumliches kartesisches Koordinatensystem besteht aus 3 sich in einem als Ursprung bezeichneten Punkt O senkrecht schneidenden Zahlengeraden (Achsen), deren Orientierung gemäß der in der Abbildung veranschaulichten „Rechten-Hand-Regel“ gewählt ist.



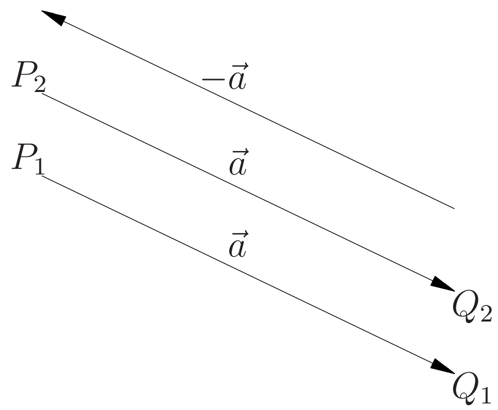
Ein Punkt X wird durch seine als Koordinaten x_i bezeichneten Werte der Projektionen auf die Achsen festgelegt: $X = (x_1, x_2, x_3)$. Verwendet man keine Indexschreibweise, so bezeichnet man die Koordinaten üblicherweise mit (x, y, z) und die Zahlenachsen als x-, y- und z-Achse. Analog definiert man ein ebenes kartesisches Koordinatensystem.

3.4.2 Vektoren im Raum

Ein Vektor ist eine gerichtete Strecke:

$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$$

bezeichnet den Vektor vom Punkt P zum Punkt Q. Alternativ kann ein Vektor als Parallel-Verschiebung des Raumes interpretiert und mit einem Pfeil identifiziert werden.



Wie aus der Abbildung ersichtlich ist, stellen gleichlange Pfeile mit gleicher Richtung den gleichen Vektor dar, $\overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{P_2Q_2}$. Die spezielle Darstellung bezogen auf den Ursprung des Koordinatensystems wird als Ortsvektor bezeichnet und definiert die Koordinaten des Vektors:

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} .$$

Die Koordinaten von $\vec{a}$ lassen sich ebenfalls als Differenz der Koordinaten der Punkte Q und P berechnen. Schließlich wird mit

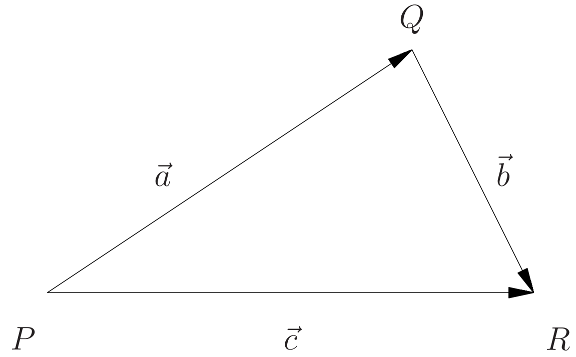
$$\overrightarrow{OO} = \overrightarrow{PP} = \vec{0}$$

der Nullvektor bezeichnet.

3.4.3 Addition von Vektoren

Die Summe von zwei Vektoren entspricht der Hintereinanderschaltung zweier Verschiebungen,

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} .$$



Für die Koordinaten gilt entsprechend

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} .$$

Mit

$$\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$$

wird die zu $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ entgegengesetzte Verschiebung $-\vec{a}$ bezeichnet. Insbesondere gilt

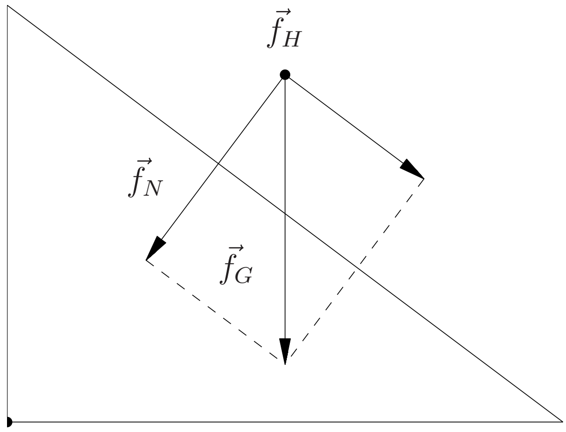
$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}, \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a} .$$

Beispiel:

Unter einer schiefen Ebene versteht man eine Ebene, die gegen die Horizontale geneigt ist. Wie man in der Abbildung sehen kann, lässt sich die Gewichtskraft $\vec{f}_G$ in zwei senkrecht zueinander stehende Komponenten zerlegen (Zerlegung einer Kraft mit Hilfe des Kräfteparallelogramms):

$$\vec{f}_G = \vec{f}_N + \vec{f}_H \,.$$

Senkrecht zur schiefen Ebene wirkt die Normalkraft $\vec{f}_N$. Parallel zur schiefen Ebene wirkt abwärts die beschleunigende Hangabtriebskraft $\vec{f}_H$.

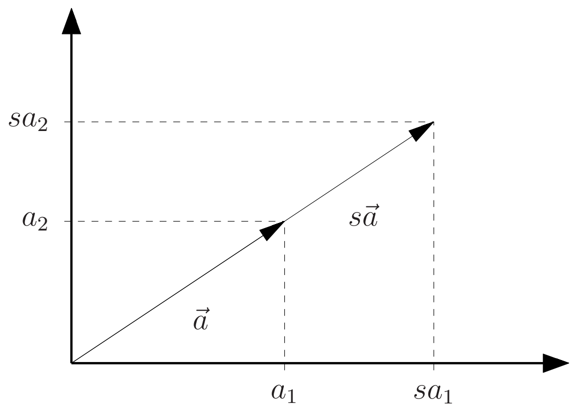


3.4.4 Skalarmultiplikation

Der Vektor $s\vec{a}$ entspricht einer s-fachen Verschiebung, d.h.

$$s \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa_1 \\ sa_2 \\ sa_3 \end{pmatrix} .$$

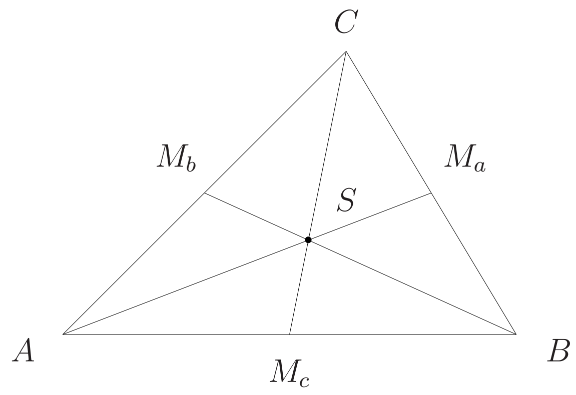
Speziell ist $0\vec{a} = \vec{0}$.



3.4.5 Schnittpunkt der Seitenhalbierenden

Die Seitenhalbierenden in einem Dreieck schneiden sich im Schwerpunkt S mit dem Ortsvektor

$$\vec{s} = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) .$$



Um dies zu verifizieren schreibt man die Ortsvektoren der Punkte auf der Seitenhalbierenden $\overline{AM_a}$ in der Form

$$\vec{p} = \vec{a} + t(\vec{m}_a - \vec{a}) = \vec{a} + t\left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a}\right), \quad t \in [0,1]\,.$$

Für $t = 2/3$ ist $\vec{p} = \vec{s}$; der Schwerpunkt teilt also $\overline{AM_a}$ im Verhältnis $2:1$. Entsprechendes gilt für die Seitenhalbierenden $\overline{BM_b}$ und $\overline{CM_c}$.

3.4.6 Betrag

Der Betrag von $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ ist die Länge des Pfeils von P nach Q bzw. von O nach A, d.h.,

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,.$$

Insbesondere ist $|s\vec{a}| = |s||\vec{a}|$.
Ein Vektor mit Betrag 1 wird als Einheitsvektor bezeichnet. Man benutzt die Schreibweise $\vec{v}^0 = \vec{v}/|\vec{v}|$ für einen normierten Vektor.

Beispiel:

Der Betrag des Vektors

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

ist $|\vec{a}| = \sqrt{16+1+64} = 9$. Dividiert man durch diesen Betrag, beziehungsweise die Länge, so erhält man den Einheitsvektor

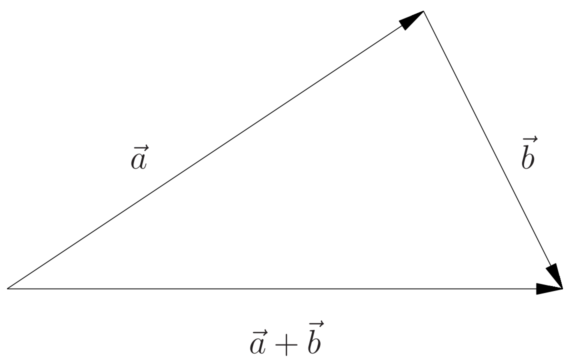
$$\vec{a}^\circ = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \begin{pmatrix} 4/9 \\ -1/9 \\ 8/9 \end{pmatrix}.$$

3.4.7 Dreiecksungleichung

Für eine Summe zweier Vektoren gilt

$$|\vec{a} + \vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel sind, d.h. $\vec{a} = s\vec{b}$.



3.4.8 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist durch

$$\begin{aligned} \vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}||\vec{b}|\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \end{aligned}$$

definiert. Insbesondere ist

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$$

und

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\perp\vec{b}\,.$$

Aus der Koordinatendarstellung des Skalarproduktes folgt

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

sowie

$$\left(s\vec{a}+r\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = s\vec{a}\cdot\vec{c} + r\vec{b}\cdot\vec{c}\,,$$

d.h. es gelten die für Produkte üblichen Rechenregeln.

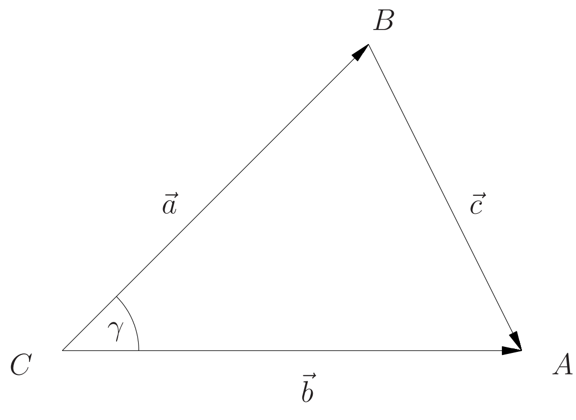
Beispiel:

Das abgebildete Dreieck besitzt die Eckpunkte

$$A = (6,0), \quad B = (4,4), \quad C = (0,0)$$

und es ist

$$\vec{a} = \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$



Der Winkel γ läßt sich mit Hilfe des Skalarproduktes berechnen:

$$\cos\gamma = \frac{\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}\right|} = \frac{24}{6\sqrt{32}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Man erhält $\gamma = \pi/4$, wie auch unmittelbar aus den Koordinaten ersichtlich ist.
Anhand des betrachteten Beispiels kann auch der Kosinussatz überprüft werden. Es gilt

$$|\vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 20 - 32 - 36 = -48\,,$$

was mit

$$-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma = -2\,(4\sqrt{2})\,6/\sqrt{2}$$

übereinstimmt.

3.4.9 Kreuzprodukt

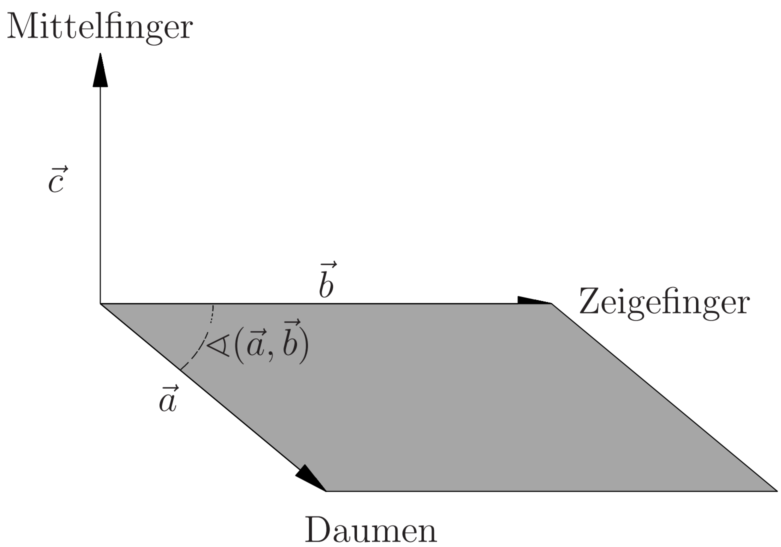
Der Vektor

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$$

ist zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal, gemäß der „Rechten-Hand-Regel" orientiert und hat die Länge

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin(\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}))\,,$$

die dem Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms entspricht.



Insbesondere gilt $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$ für $\vec{a}\|\vec{b}$ und $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$ für $\vec{a}\perp\vec{b}$.
Alternativ lässt sich das Vektorprodukt durch

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

definieren.

Beispiel:

Als Beispiel wird das Kreuzprodukt der Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

berechnet. Man erhält

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 2 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 - 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Bildet man die Beträge, so lässt sich mit der alternativen Definition des Kreuzproduktes der Winkel zwischen den Vektoren bestimmen:

$$\sin \sphericalangle(\vec{a}\vec{b}) = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{9}{3\sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

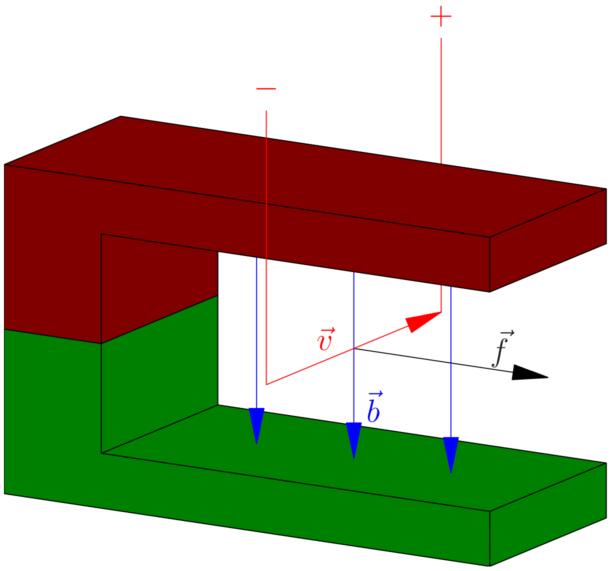
impliziert $\sphericalangle(\vec{a}\vec{b}) = \frac{\pi}{4}$.

3.4.10 Lorentzkraft

Auf ein Elektron mit der Ladung $-e$, das sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ in einem Magnetfeld $\vec{b}$ bewegt, wirkt die Lorentzkraft

$$\vec{f} = e\vec{b} \times \vec{v}\,.$$

Dies bewirkt bei der abgebildeten Versuchsanordnung eine Auslenkung des stromdurchflossenen Leiters in Richtung $\vec{f}$.

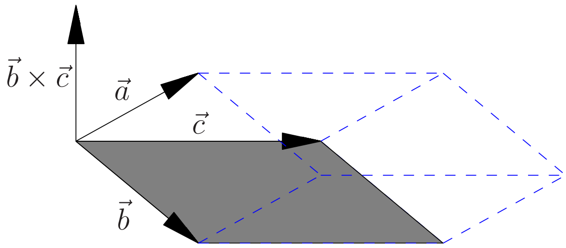


3.4.11 Spatprodukt

Das Spatprodukt

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

stimmt bis auf Vorzeichen mit dem Volumen des von den drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ aufgespannten Spats überein. Es ist positiv, wenn die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ gemäß der Rechten-Hand-Regel orientiert sind.



Mit Hilfe des ε-Tensors lässt sich das Spatprodukt auch in der Form

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} a_i b_j c_k$$

schreiben.

Beispiel:

Als Beispiel wird das Spatprodukt der Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

berechnet. Zunächst bildet man dazu das Kreuzprodukt

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 - 9 \cdot 7 \\ 9 \cdot 6 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 7 - 5 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -53 \\ 52 \\ -23 \end{pmatrix}.$$

Das Skalarprodukt mit $\vec{a}$ liefert dann

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -53 \\ 52 \\ -23 \end{pmatrix} = -360\,.$$

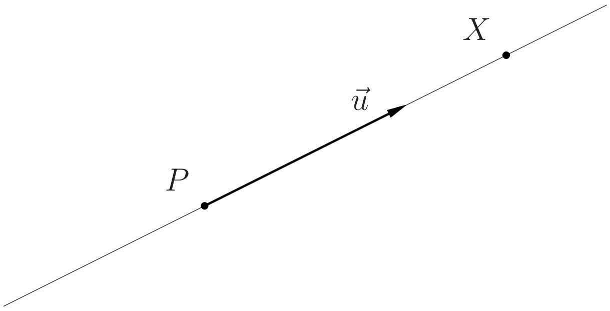
3.5 Geraden und Ebenen

3.5.1 Punkt-Richtungs-Form

Die Punkte X auf einer Geraden durch P mit Richtung $\vec{u}$ lassen sich in parametrischer Form durch

$$\overrightarrow{PX} = t\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}$$

darstellen.



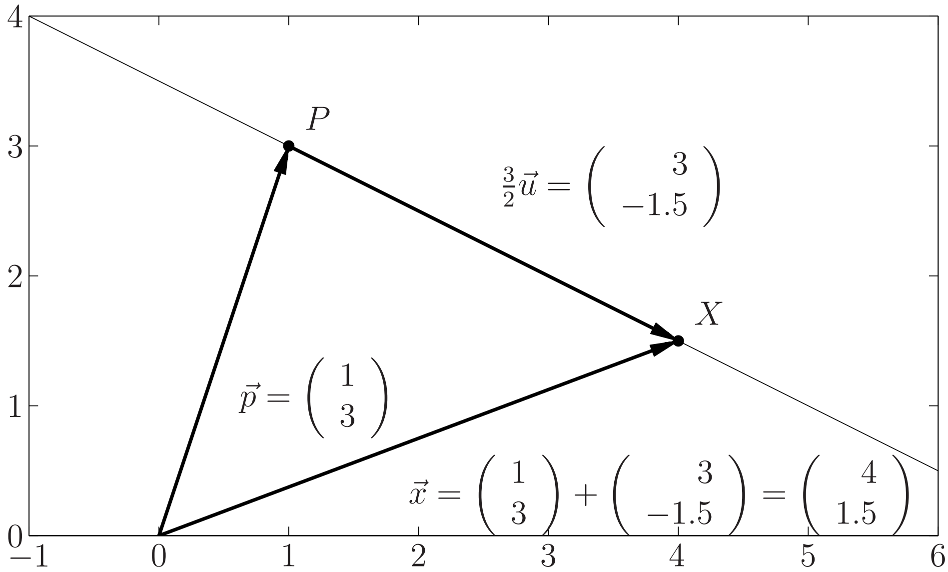
Entsprechend gilt

$$x_i = p_i + tu_i, \quad i = 1, 2, 3\,,$$

für die Koordinaten des Ortsvektors $\vec{x}$.

Beispiel:

Die Abbildung veranschaulicht die Punkt-Richtungs-Form einer Geraden g mit Aufpunkt $P = (1, 3)$ und Richtung $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Der markierte Punkt X der Geraden hat den Parameterwert $t = 3/2$.



Eine Parametrisierung der Geraden ist

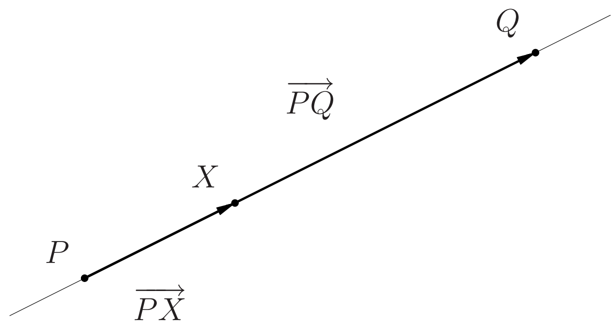
$$\text{g: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

3.5.2 Zwei-Punkte-Form

Die Punkte X auf einer Geraden durch zwei Punkte $P \neq Q$ lassen sich in der Form

$$\overrightarrow{PX} = t\overrightarrow{PQ}, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

darstellen. Die Parameterwerte $t \in [0, 1]$ entsprechen dabei der Strecke $\overline{PQ}$.



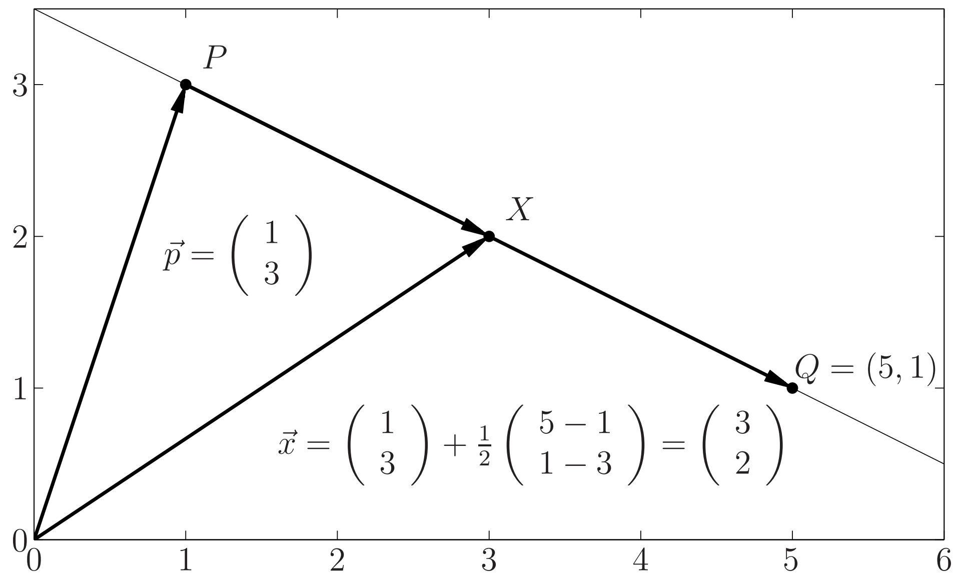
Entsprechend gilt

$$x_i = p_i + t(q_i - p_i), \quad i = 1, 2, 3\,,$$

für die Koordinaten des Ortsvektors $\vec{x}$.

Beispiel:

Für $t \in [0, 1]$ teilt der Punkt X die Strecke $\overline{PQ}$ bei der Zwei-Punkte-Form im Verhältnis $t : (1 - t)$. Insbesondere entspricht der Mittelpunkt zwischen den Punkten P und Q dem Parameterwert $t = 1/2$.



Eine Parametrisierung der abgebildeten Geraden ist

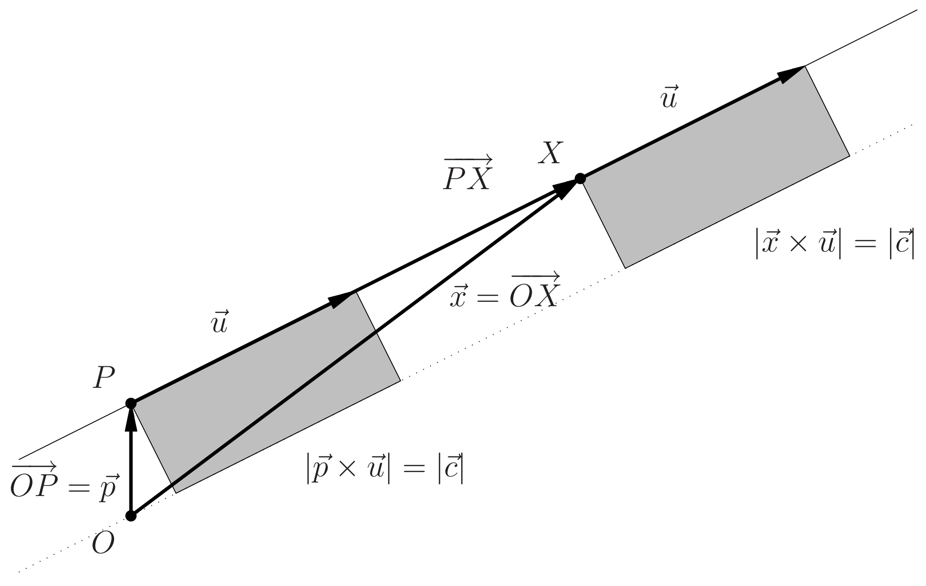
$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5-1 \\ 1-3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

3.5.3 Momentenform

Die Punkte X auf einer Geraden durch P mit Richtung $\vec{u}$ lassen sich durch

$$\overrightarrow{PX} \times \vec{u} = \vec{0}$$

beschreiben.



Entsprechend gilt für den Ortsvektor

$$\vec{x}\times\vec{u} = \vec{c}, \quad \vec{c} = \vec{p}\times\vec{u}\,.$$

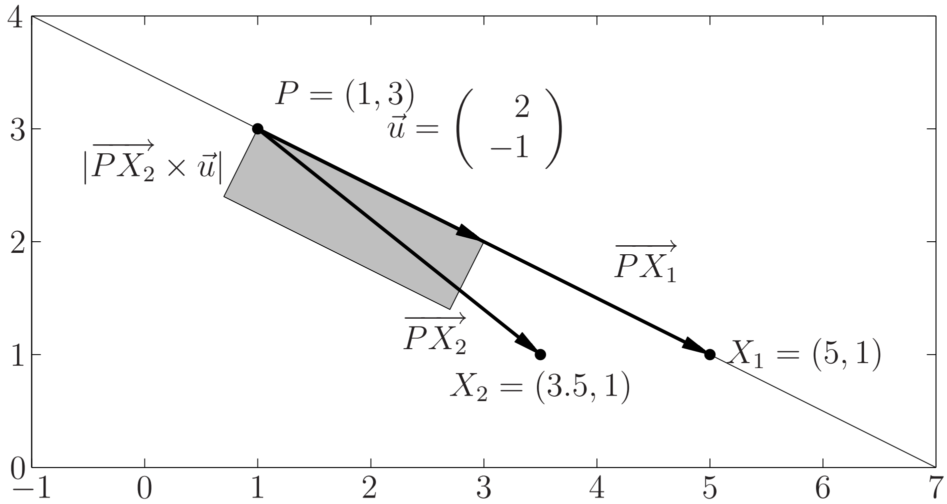
Beispiel:

Die Momentenform einer Geraden kann verwendet werden, um festzustellen ob ein gegebener Punkt X auf einer Geraden liegt. Für das abgebildete Beispiel ergibt sich für den Punkt X_1

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PX_1}\times\vec{u} &= \left(\begin{pmatrix} 5\\ 1\\ 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1\\ 3\\ 0\end{pmatrix}\right)\times\begin{pmatrix} 2\\ -1\\ 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 4\\ -2\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 2\\ -1\\ 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 4\cdot(-1)-2\cdot(-2)\end{pmatrix} = \vec{0}\,.
\end{aligned}$$

Für den Punkt X_2 erhält man hingegen

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PX_2}\times\vec{u} &= \begin{pmatrix} 2.5\\ -2\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 2\\ -1\\ 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 2.5\cdot(-1)-2\cdot(-2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1.5\end{pmatrix} \neq \vec{0}\,.
\end{aligned}$$



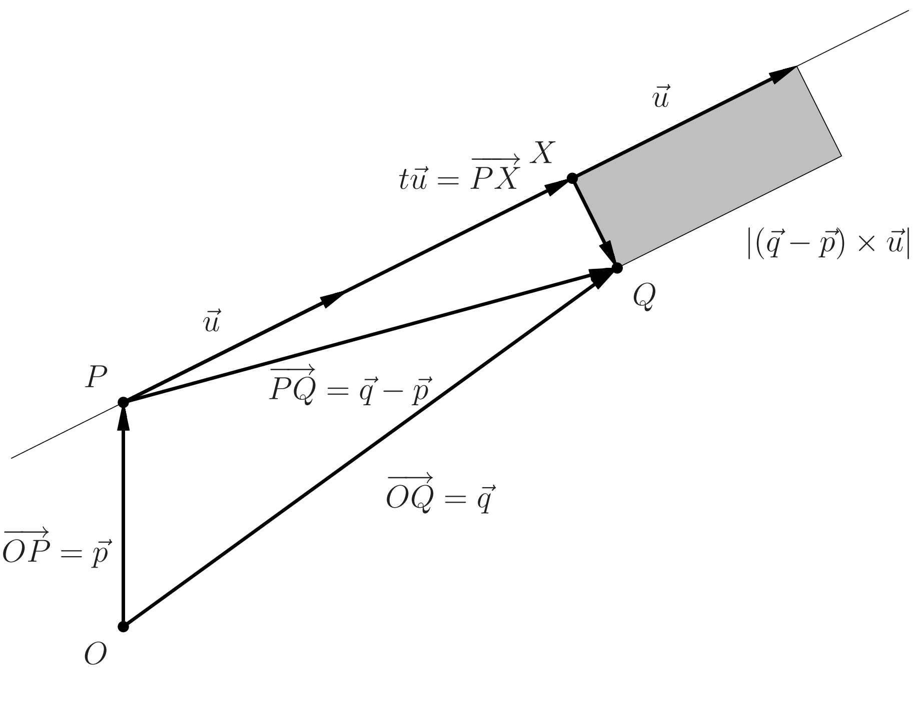
3.5.4 Abstand Punkt-Gerade

Die Projektion X eines Punktes Q auf eine Gerade durch P mit Richtung $\vec{u}$ erfüllt

$$\overrightarrow{PX} = t\vec{u}, \quad t = \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}.$$

Daraus ergibt sich der Abstand als

$$d = \frac{|(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}.$$



Beispiel:

Projiziert man den Punkt $Q = (3, 3, 3)$ auf die Gerade

$$g : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erhält man als Projektion den Punkt mit Ortsvektor

$$
\begin{aligned}
\vec{x} = \vec{p} + \frac{(\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\,\vec{u} \quad &= \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + \frac{\left(\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{1^2+1^2+1^2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + \frac{1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 0\cdot 1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Der Abstand ist

$$
d = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{(2+0)^2+(0-1)^2+(1-2)^2}{3}} = \sqrt{2}\,,
$$

in Einklang mit

$$
\left|\overrightarrow{XQ}\right| = \sqrt{(3-3)^2+(3-2)^2+(3-4)^2} = \sqrt{2}\,.
$$

3.5.5 Abstand zweier Geraden

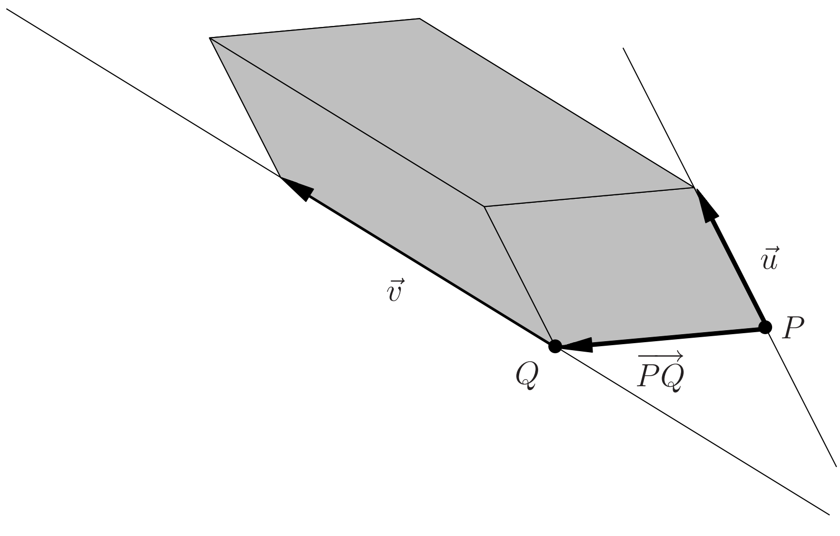
Der Abstand zweier durch die Punkte P, Q und Richtungen $\vec{u}$, $\vec{v}$ gegebener Geraden ist

$$
d = \frac{|[\overrightarrow{PQ},\vec{u},\vec{v}]|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}\,,
$$

falls $\vec{u} \not\parallel \vec{v}$. Für parallele Geraden gilt

$$
d = \frac{|\overrightarrow{PQ}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}\,.
$$

$$
\left|\left[\overrightarrow{PQ},\vec{u},\vec{v}\right]\right|
$$



Man bezeichnet zwei Geraden als windschief, wenn sie nicht parallel sind und einen positiven Abstand haben.

3.5.6 Flugkorridore

Geht man von den vereinfachenden Annahmen aus, dass Flugzeuge auf direktem Weg vom Start zum Ziel fliegen und die Flugbahn aus Geradenstücken besteht, so erhält man für einen Flug von Stuttgart (S) nach Kopenhagen die Steigflugbahn

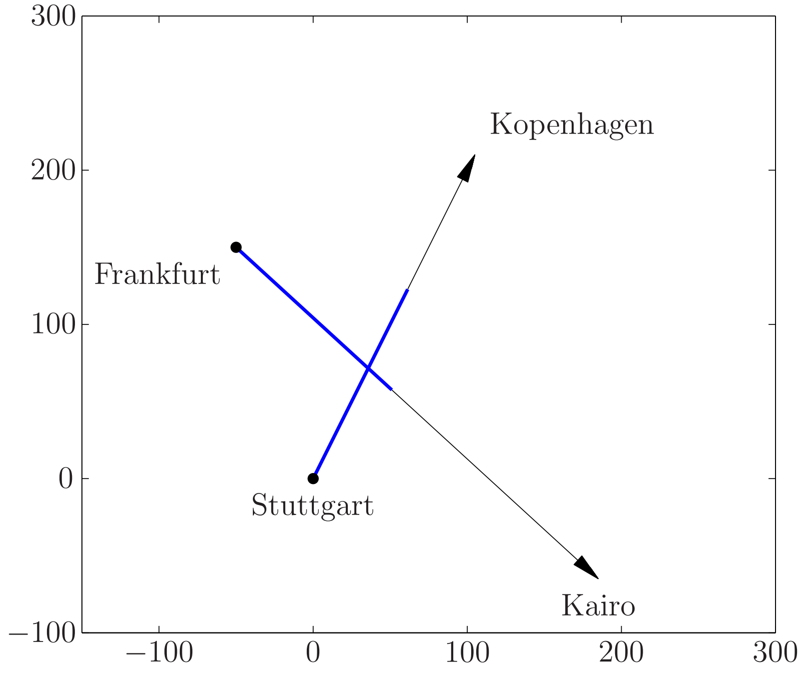
$$g : \overrightarrow{SX} = s \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in [0, 8]$$

und für einen Flug von Frankfurt (F) nach Kairo

$$h : \overrightarrow{FX} = t \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 3]\,.$$

Legt man den Koordinatenursprung nach Stuttgart, so hat Frankfurt die Koordinaten $F = (-50, 150, -1/4)$, gemessen in Kilometern. Die beiden Flugbahnen haben somit einen Abstand von

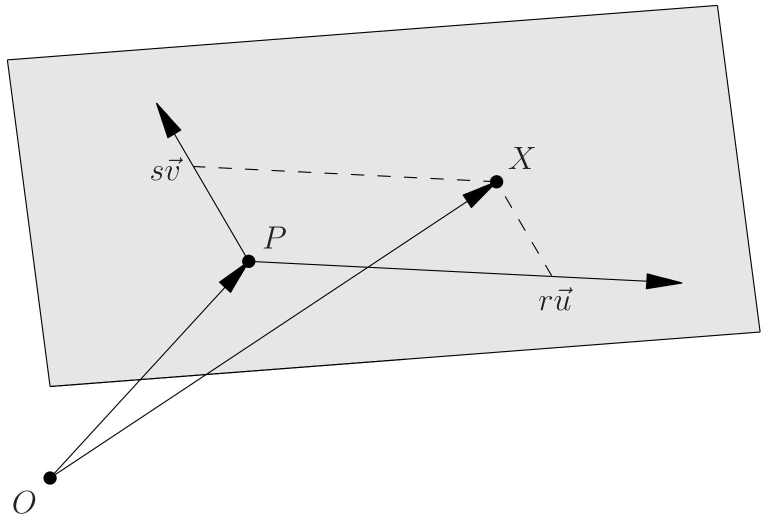
$$\begin{aligned} d &= \frac{\left| \left(\begin{pmatrix} -50 \\ 150 \\ -1/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left| \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix} \right|} \\ &= \frac{\left| \begin{pmatrix} -50 \\ 150 \\ -1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 95 \\ 2 \\ -792 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{95^2 + 2^2 + 792^2}} = \frac{4252}{\sqrt{636293}} \approx 5.33\,. \end{aligned}$$



3.5.7 Parameterdarstellung einer Ebene

Punkte X auf einer Ebene durch P, die von zwei nicht parallelen Richtungen $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannt wird, erfüllen

$$\overrightarrow{PX} = s\vec{u} + t\vec{v}, \quad s, t \in \mathbb{R}\,.$$



Entsprechend gilt

$$x_i = p_i + su_i + tv_i, \quad i = 1, 2, 3\,.$$

für die Koordinaten des Ortsvektors $\vec{x}$.

Beispiel:

Eine Ebene E sei gegeben durch den Punkt $P = (1, 2, 3)$ und die Vektoren $\vec{u} = (2, 0, 0)^t$ und $\vec{v} = (1, 1, 1)^t$, d.h.

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Dann liegt $X = (1, 1, 2)$ auf der Ebene, denn es gilt

$$\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\vec{u} + (-1)\vec{v}$$

Andererseits liegt $X = (0, 0, 0)$ nicht auf der Ebene, denn es ist $\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und das Gleichungssystem

$$s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

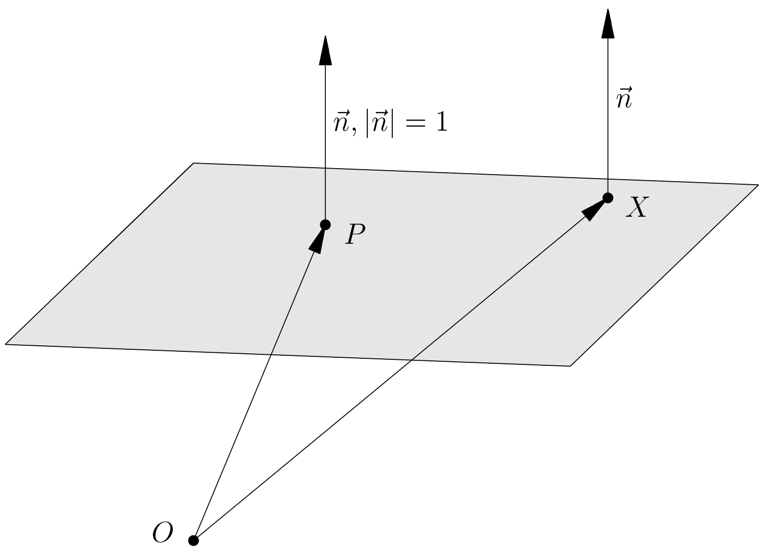
hat keine Lösung, wie man an der zweiten und dritten Zeile sehen kann.

3.5.8 Hesse-Normalform einer Ebene

Der Ortsvektor $\vec{x}$ eines Punktes X auf einer Ebene durch P orthogonal zu einem Normalenvektor $\vec{n}$ erfüllt

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = d, \quad d = \vec{p} \cdot \vec{n}\,.$$

Bei der Normalform wird dabei $|\vec{n}| = 1$ und $d \geq 0$ angenommen. In diesem Fall ist d der Abstand der Ebene zum Ursprung.



Beispiel:

Eine Ebene E sei gegeben durch den Punkt $P = (1, 2, 3)$ und den normierten Normalenvektor $\vec{n} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$.
Es ist

$$d = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = 3\,,$$

d.h. die Ebene hat die Normalform

$$E: \quad \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 3\,.$$

Dann liegt $X = (4, 0, 1)$ auf der Ebene, denn es gilt

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \frac{1}{3}(8 + 0 + 1) = d\,.$$

Andererseits liegt $X = (0, 0, 0)$ nicht auf der Ebene, denn es ist

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = 0 \neq d\,.$$

3.5.9 Umrechnung zwischen Ebenendarstellungen

Eine Ebene E sei gegeben durch die Punkte

$$P = (7, 2, 0), \quad Q = (1, -6, 2), \quad R = (-1, -8, 3),$$

d.h.

$$E : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = 0.$$

Zwei Richtungen, die die Ebene aufspannen, erhält man als Differenzen der Ortsvektoren $\vec{p}$, $\vec{q}$ und $\vec{r}$:

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Damit ist eine Parameterdarstellung der Ebene

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}_0$$

Ein Normalenvektor ist

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -24 + 20 \\ -16 + 18 \\ 60 - 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Normierung ergibt

$$\vec{n}^0 = \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \sigma \in \{-1, 1\}$$

Für die Hesse-Normalform muss σ so gewählt werden, dass

$$d = \sigma\,(7,\ 2,\ 0) \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

nicht negativ ist, also σ = -1. Damit erhält man

$$E : \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 4$$

3.5.10 Abstand Punkt-Ebene

Der Lotvektor eines Punktes Q auf eine Ebene E durch P mit Normalenvektor $\vec{n}$ ist

$$\overrightarrow{XQ} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2}\,\vec{n}\,.$$

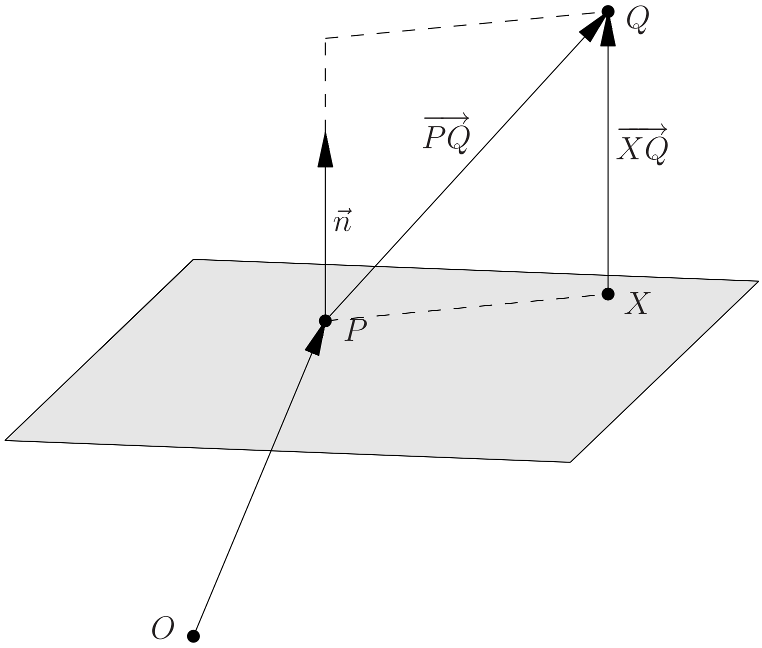
Seine Länge

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

ist der Abstand der Ebene zu Q. Der Punkt X mit Ortsvektor

$$\vec{x} = \vec{q} - \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$$

wird als Projektion von Q auf E bezeichnet.



Beispiel:

Für die Ebene durch den Punkt $P = (1, 2, 3)$ mit Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ soll der Abstand d des Punktes $Q = (3, 2, 3)$ sowie die Projektion X auf die Ebene bestimmt werden.

Zunächst ist

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = 4, \quad |\vec{n}| = 3\,.$$

Damit erhält man

$$\overrightarrow{XQ} = \frac{4}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad d = \frac{4}{3}$$

und errechnet schließlich

$$\vec{x} = \vec{q} - \overrightarrow{XQ} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 19 \\ 14 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

3.5.11 Schnitt zweier Ebenen

Der kleinere der beiden Winkel $\varphi \in [0, \pi/2]$ zwischen zwei Ebenen mit Normalenvektoren $\vec{n}_i$ ist durch

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$$

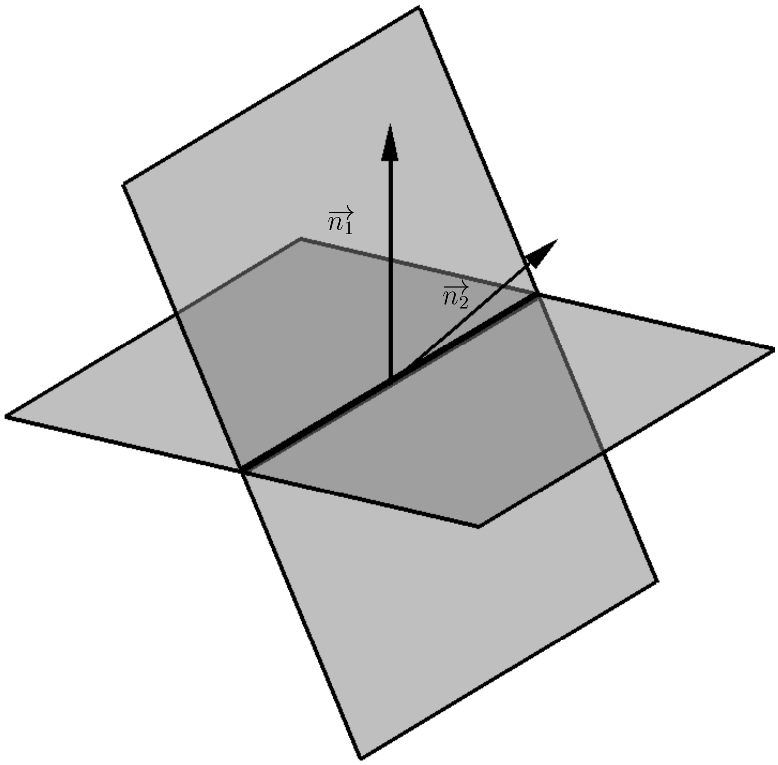
eindeutig bestimmt und

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

ist die Richtung der Schnittgeraden g. Einen Punkt P auf g kann man durch Schnitt mit einer der Koordinatenebenen bestimmen und erhält dann

$$g : \vec{x} = \vec{p} + t\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R},$$

als Parameterdarstellung von g.



Beispiel:

Für die zwei Ebenen, die jeweils durch die Punkte $P_1 = (1, 2, 0)$, $P_2 = (0, 1, 3)$ und die Normalenvektoren

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

definiert sind, soll der der Winkel φ zwischen den Ebenen und die Schnittgerade der Ebenen bestimmt werden.

Es ist

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{1}{2}$$

und damit

$$\varphi = \pi/3\,.$$

Weiterhin ist

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

die Richtung der Schnittgeraden g. Um einen Punkt X auf g zu bestimmen, geht man von den beiden Ebenengleichungen aus:

$$E_k : \vec{x} \cdot \vec{n}_k = \vec{p}_k \cdot \vec{n}_k,$$

d.h.

$$E_1 : x_1 - x_2 = -1$$
$$E_2 : -x_2 + x_3 = 2.$$

Wählt man $x_2 = 0$, ao folgt $x_1 =$ -1 und $x_3 = 2$. Eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden ist somit

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

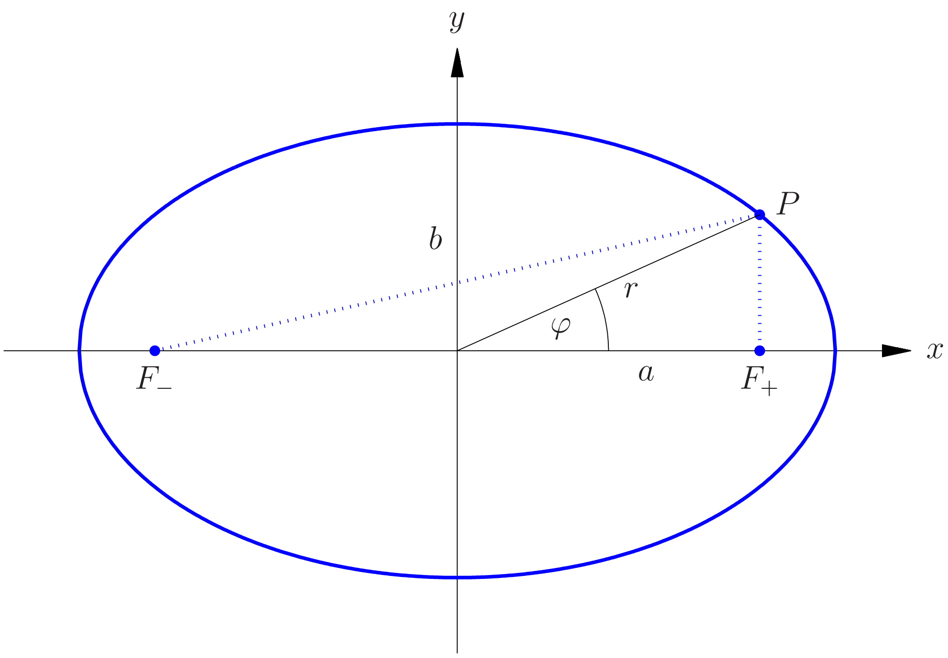
3.6 Quadratische Kurven

3.6.1 Ellipse

Für die Punkte $P = (x, y)$ auf einer Ellipse ist die Summe der Abstände zu zwei Brennpunkten $F_\pm$ konstant:

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| = 2a$$

mit $2a > |\overrightarrow{F_-F_+}|$.



Ist $F_\pm = (\pm f, 0)$, so gilt für die Koordinaten

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - f^2\,,$$

und

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

für die Polarkoordinaten der Punkte P.
Eine Parametrisierung der Ellipse ist

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

mit $t \in [0, 2\pi)$.

Beweis:

Die Äquivalenz der Darstellungen kann man durch direktes Nachrechnen überprüfen.
Um zu zeigen, dass

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| = 2a \quad \iff \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - f^2$$

quadriert man

$$\underbrace{2a - \sqrt{(x+f)^2 + y^2}}_{>0} = \sqrt{(x-f)^2 + y^2}$$

und erhält die zur linken Gleichung äquivalente Beziehung

$$\underbrace{4a^2 + 4xf}_{>0} = 4a\sqrt{(x+f)^2 + y^2}\,.$$

Erneutes Quadrieren nach Division durch $4a$ liefert

$$a^2 + 2xf + \frac{f^2}{a^2}x^2 = x^2 + 2xf + f^2 + y^2\,.$$

Mit Substitution von $f^2 = a^2 - b^2$ ergibt sich nach Umformung die Koordinatenform.
Zur Herleitung der Polarform

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

multipliziert man mit dem Nenner und berücksichtigt

$$x^2 = (x^2 + y^2)\cos^2(\varphi)\,.$$

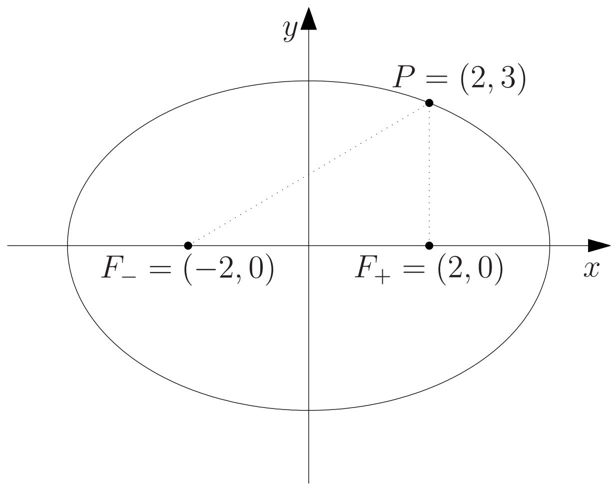
Damit folgt

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2 = b^2$$

und Division durch b^2 ergibt die Koordinatenform.

Beispiel:

Als Beispiel wird eine Ellipse mit den Brennpunkten $F_\pm = (\pm 2, 0)$ durch den Punkt $P = (2, 3)$ konstruiert.



Zunächst berechnet man dazu die Abstandssumme von P zu den Brennpunkten:

$$2a = 3 + \sqrt{3^2 + 4^2} = 8\,.$$

Die Länge der anderen Halbachse erhält man aus

$$b = \sqrt{a^2 - f^2} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}\,.$$

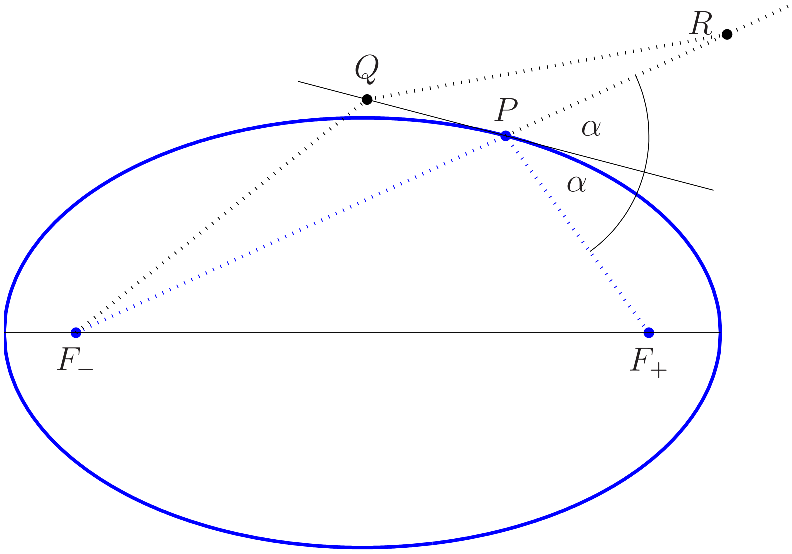
Damit ist

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

die Gleichung der Ellipse.

3.6.2 Brennpunktstrahlen

Bei einer Ellipse werden Brennpunktstrahlen in Brennpunktstrahlen reflektiert.



Zum Beweis wählt man als Hilfspunkte das Spiegelbild R des Brennpunkts F_+ an der Tangente g und einen beliebigen Punkt $Q \neq P$ auf g. Da Q außerhalb der Ellipse liegt, ist

$$2a = |\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| < |\overrightarrow{QF_-}| + |\overrightarrow{QF_+}|\,.$$

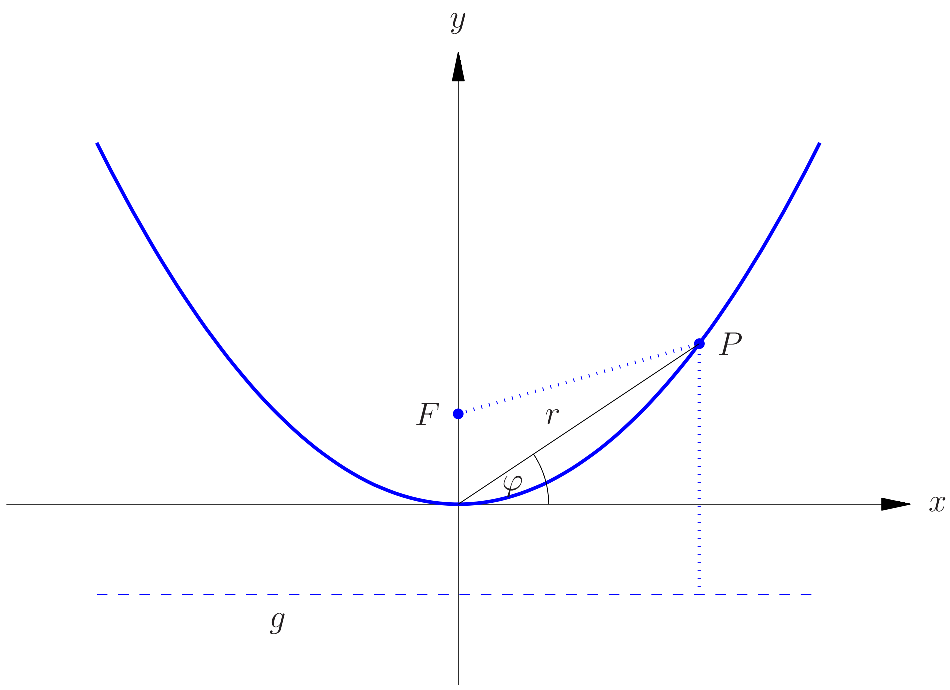
Ersetzt man die Strecken $\overline{PF_+}$ und $\overline{QF_+}$ durch ihre Spiegelbilder, so erhält man

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PR}| < |\overrightarrow{QF_-}| + |\overrightarrow{QR}|\,,$$

und folglich müssen F_-, P, R auf einer Geraden liegen. Damit ist $\sphericalangle(F_-PQ) = \alpha$.
Diese Spiegelungseigenschaft wird bei der Zertrümmerung von Nierensteinen ausgenutzt. Die Strahlen aus einer radialen Quelle im Brennpunkt F_- können durch einen elliptischen Reflektor im Brennpunkt F_+ gebündelt werden.

3.6.3 Parabel

Die Punkte $P = (x, y)$ auf einer Parabel haben von einem Brennpunkt F und einer Leitgerade g den gleichen Abstand.



Ist $F = (0, f)$ und $g : y = -f$, so gilt für die Koordinaten

$$4fy = x^2$$

und

$$r = \frac{4f \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$$

für die Polarkoordinaten der Punkte P.

Beweis:

Die Äquivalenz der Darstellungen ist offensichtlich. Durch Gleichsetzen der quadrierten Abstände,

$$|\overrightarrow{PF}|^2 = x^2 + (y - f)^2 = (y + f)^2 = (\mathrm{dist}(P, g))^2$$

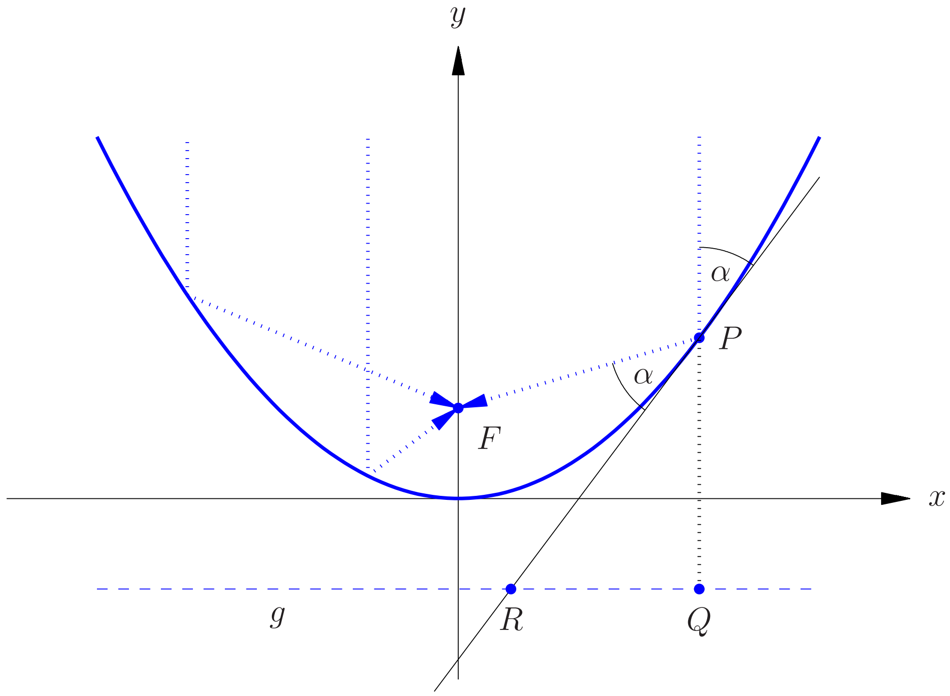
erhält man die Koordinatenform. Substitution von

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

führt auf die Polarform.

3.6.4 Satelliten-TV

Bei einer Parabel werden parallele, senkrecht zur Leitgerade einfallende Strahlen im Brennpunkt gebündelt. Dies wird bei Satellitenschüsseln und Teleskopen ausgenutzt, um einfallende Signale zu verstärken.



Zum Beweis bemerkt man, dass

$$\overrightarrow{FP} + \overrightarrow{QP} = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ -f \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix}$$

parallel zur Richtung der Tangente im Punkt P,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x/(2f) \end{pmatrix},$$

ist. Da

$$|\overrightarrow{FP}| = |\overrightarrow{QP}|,$$

folgt daraus die Gleichheit der Winkel $\sphericalangle(F, P, R)$ und $\sphericalangle(R, P, Q)$, wobei R den Schnittpunkt der Tangente mit g bezeichnet.

Beispiel:

Als Beispiel wird die Position des Receivers für eine Satellitenschüssel mit Durchmesser $2r = 1$ und Höhe gleich 0.2 bestimmt. Dazu setzt man $x = r = \frac{1}{2}$ und $y = 0.2$ in die Parabelgleichung

$$4fy = x^2$$

ein und erhält

$$f = \frac{x^2}{4y} = \frac{1/4}{4 \cdot 0.2} = \frac{5}{16}.$$

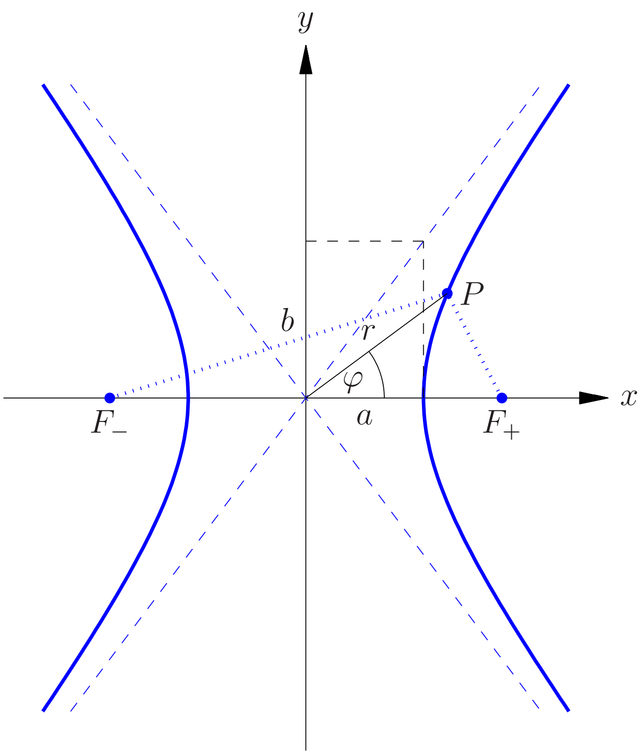
als Abstand des Receivers vom Scheitelpunkt der Parabel.

3.6.5 Hyperbel

Für die Punkte $P = (x, y)$ auf einer Hyperbel ist die Differenz der Abstände zu zwei Brennpunkten $F_\pm$ konstant:

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a$$

mit $2a < |\overrightarrow{F_-F_+}|$.



Ist $F_\pm = (\pm f, 0)$, so gilt für die Koordinaten

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2\,,$$

und

$$r^2 = -\frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

für die Polarkoordinaten der Punkte P. Die Asymptoten haben die Steigung $\pm b/a$. Parametrisierungen der Hyperbeläste sind

$$x = \pm a \cosh t, \quad y = b \sinh t$$

mit $t \in \mathbb{R}$.

Beweis:

Die Äquivalenz der Darstellungen kann man durch direktes Nachrechnen überprüfen. Um zu zeigen, dass

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2\,,$$

quadriert man

$$\underbrace{\sqrt{(x+f)^2 + y^2} \pm 2a}_{>0} = \sqrt{(x-f)^2 + y^2}$$

und erhält die zur linken Gleichung äquivalente Beziehung

$$\underbrace{4a^2 + 4xf}_{>0} = \pm 4a\sqrt{(x+f)^2 + y^2}\,.$$

Erneutes Quadrieren nach Division durch $4a$ liefert

$$a^2 + 2xf + \frac{f^2}{a^2}x^2 = x^2 + 2xf + f^2 + y^2\,.$$

Mit Substitution von $f^2 = a^2 + b^2$ ergibt sich nach Umformung die Koordinatenform.
Zur Herleitung der Polarform

$$r^2 = -\frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2\varphi}$$

multipliziert man mit dem Nenner und berücksichtigt

$$x^2 = (x^2 + y^2)\cos^2\varphi\,.$$

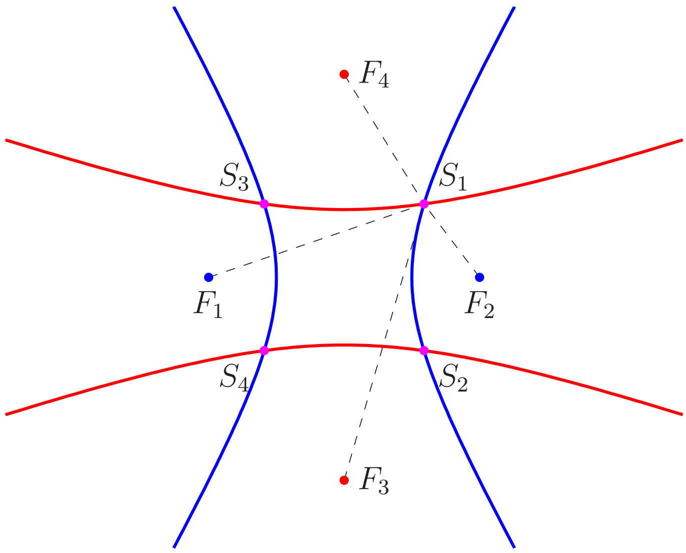
Damit folgt

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2 + b^2}{a^2}x^2 = -b^2$$

und Division durch $-b^2$ ergibt die Koordinatenform.

3.6.6 Navigation

Zur Bestimmung der Position P eines Schiffes werden die Zeitdifferenzen $2a_{j,k}$ beim Empfang von synchronen Radiosignalen von verschiedenen Sendestationen F_i verglichen. So lässt sich P als Schnittpunkt der Hyperbeln mit Brennpunkten F_j, F_k bestimmen.



Als konkretes Beispiel wird

$$F_1 = (-2, 0),\; F_2 = (2, 0), \quad F_3 = (0, -3),\; F_4 = (0, 3)$$

und $a_{1,2} = a_{3,4} = 1$ gewählt. Die entsprechenden Hyperbelgleichungen sind

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1, \qquad y^2 - \frac{x^2}{8} = 1\,,$$

und man erhält

$$x^2 = \frac{32}{23}, \quad y^2 = \frac{27}{23}$$

für die Koordinaten der möglichen 4 Schnittpunkte S_i.
Wie auch aus der Abbildung ersichtlich ist, existieren vier Lösungen. Bei der Navigation ist dies unproblematisch, da ein Kapitän wissen sollte, wo sich sein Schiff ungefähr befindet, d.h. welches die relevante Lösung ist.

3.7 Aufgaben und Test

3.7.1 Aufgaben

Aufgabe 1 (Online-Nummer 232):
Ein Fluss hat die Breite $b = 200\,\mathrm{m}$ und eine überall gleiche Strömungsgeschwindigkeit von $2\,\mathrm{km/h}$. Vom linken Ufer startet ein Boot mit der Eigengeschwindigkeit $10\,\mathrm{km/h}$. Unter welchem Winkel muss es ablegen, um

a) genau an der gegenüberliegenden Stelle anzukommen?

b) $1\,\mathrm{km}$ flußabwärts anzukommen?

c) das andere Ufer möglichst schnell zu erreichen? An welcher Stelle des rechten Ufers kommt es dann an?

Aufgabe 2 (Online-Nummer 243):
Zeigen Sie, dass sich in einem Tetraeder die Verbindungsstrecken zwischen den Ecken und den Schwerpunkten der Gegenflächen in einem Punkt (Schwerpunkt des Tetraeders) schneiden und im Verhältnis $3:1$ teilen.

Aufgabe 3 (Online-Nummer 223):
Beweisen Sie:
„Die Summe der Quadrate über den Seiten eines Parallelogramms ist gleich der Summe der Quadrate über den Diagonalen („Parallelogrammgleichung“).“

Aufgabe 4 (Online-Nummer 18):
Berechnen Sie auf möglichst **einfache** Weise:

a) $$\left(\begin{pmatrix} 2\\3\\4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1\\2\\3 \end{pmatrix}\right) \times \begin{pmatrix} 1\\-1\\1 \end{pmatrix}$$

b) $$\left\langle \begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\2\\3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4\\1\\6 \end{pmatrix} \right\rangle$$

c) $$\left(\left(\begin{pmatrix} 92\\101\\\mathbf{0} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 77\\21\\\mathbf{0} \end{pmatrix}\right) \times \left(\begin{pmatrix} 89\\\mathbf{0}\\111 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 54\\\mathbf{0}\\67 \end{pmatrix}\right)\right) \times \left(\begin{pmatrix} \mathbf{0}\\29\\93 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbf{0}\\114\\26 \end{pmatrix}\right)$$

Aufgabe 5 (Online-Nummer 424):
Welche Bedingungen müssen $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ und r erfüllen, damit die Gleichungen

$$\vec{a} \cdot \vec{x} = r\,, \quad \vec{b} \times \vec{x} = \vec{c}$$

Lösungen $\vec{x}$ besitzen? Bestimmen Sie die Lösungsvektoren in Abhängigkeit von r für

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1\\2\\1 \end{pmatrix}\,, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1\\-3\\1 \end{pmatrix}\,, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0\\-2\\1 \end{pmatrix}\,.$$

Aufgabe 6 (Online-Nummer 389):
Bestimmen Sie für das Dreieck T mit den Eckpunkten $(2, 2, 1)$, $(1, 2, 2)$, $(1, 1, 1)$

a) den Flächeninhalt,

b) alle Winkel,

c) die Hesse-Normalform der Ebene, die T enthält,

d) eine orthonormale Basis mit einer Achse senkrecht zu T.

Aufgabe 7 (Online-Nummer 230 Variante 1):
Zeigen Sie, dass die beiden Geraden

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

windschief sind, und berechnen Sie ihren Abstand sowie die Punkte $P \in g_1$, $Q \in g_2$, zwischen denen der Abstand angenommen wird.

Aufgabe 8 (Online-Nummer 339):
Bestimmen Sie alle Geraden, die von den Punkten

$$(0, 0),\ (1, 3),\ (6, 10)$$

den gleichen Abstand haben.

Aufgabe 9 (Online-Nummer 246):
Gegeben sind die Punkte

$$A = (1, 0, 2), \quad B = (4, 3, 0), \quad C = (0, 6, 5) \quad \text{und} \quad D = (7, 0, 8).$$

a) Wie viele Ebenen gibt es, die von diesen Punkten den gleichen Abstand haben?

b) Für welche dieser Ebenen ist der gemeinsame Abstand am kürzesten?

Aufgabe 10 (Online-Nummer 247):
Gegeben sind die Ebene E_1 und die Gerade g_1:

$$E_1 :\ 7x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 4, \qquad g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die Ebene E_2, die g_1 enthält und zu E_1 senkrecht ist.

b) Geben Sie die zu E_2 senkrechte Ursprungsgerade g_2 an.

c) Welche Ebenen haben zu E_2 den Abstand 1? Schneiden Sie diese Ebenen mit E_1 und g_2.

d) Welche Punkte haben sowohl von E_2 als auch von E_1 den Abstand 1? Welche Punkte haben von E_2 und von g_2 den Abstand 1?

Aufgabe 11 (Online-Nummer 343):
Bestimmen Sie die Ellipse mit den Brennpunkten $(\pm 2, 0)$, die durch den Punkt $(3, 1)$ verläuft.

3.7.2 Test

(Online-Test Nummer 97 enthält Aufgaben mit Varianten)

Aufgabe 1:
Lösen Sie das lineare Gleichungssystem.

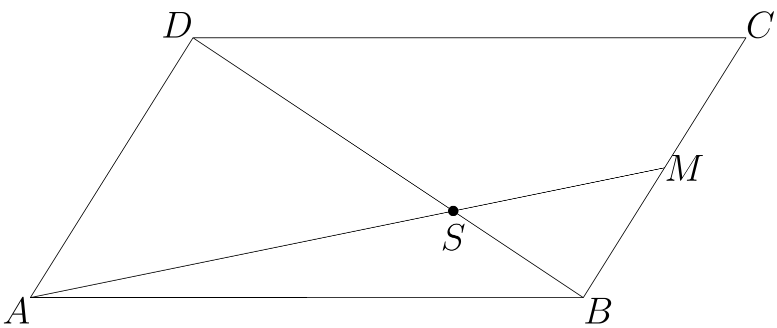
$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & 2x_2 & - & 6x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \\ 4x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & = & 3 \end{array}$$

Lösung:
$x_1 = \boxed{}$, $x_2 = \boxed{}$, $x_3 = \boxed{}$
(auf drei Dezimalstellen runden)

Aufgabe 2:
Im Parallelogramm $ABCD$ bezeichne M den Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$ und S den Schnittpunkt der Strecke $\overline{AM}$ mit der Diagonalen $\overline{BD}$.

a) In welchem Verhältnis teilt S die Diagonale $\overline{BD}$?

b) In welchem Verhältnis steht die Fläche des Parallelogramms $ABCD$ zur Fläche des Dreiecks BMS?



Antwort: (Angabe mit natürlichen Zahlen in vollständig gekürzter Form)

a) Das Verhältnis $\overline{BS} : \overline{SD}$ beträgt $\boxed{} : \boxed{}$.

b) Das Verhältnis Fläche BMS : Fläche $ABCD$ beträgt $\boxed{} : \boxed{}$.

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie für die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, **b)** $(-\vec{b}) \times \vec{a}$, **c)** $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, **d)** $[\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}]$.
Antwort:
a) $\boxed{}$, **b)** $\left(\boxed{}, \boxed{}, \boxed{}\right)^{\mathrm{t}}$, **c)** $\left(\boxed{}, \boxed{}, \boxed{}\right)^{\mathrm{t}}$, **d)** $\boxed{}$

Aufgabe 4:
Bestimmen Sie für das Dreieck mit den Eckpunkten

$$A = (2, -1, 2), \quad B = (-1, 5, -1), \quad C = (0, 1, 2)$$

alle Seitenlängen, den Winkel $\sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ und den Flächeninhalt.
Antwort:
$|\overrightarrow{AB}|^2 = \boxed{}$, $|\overrightarrow{BC}|^2 = \boxed{}$, $|\overrightarrow{AC}|^2 = \boxed{}$, $\sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pi/\boxed{}$.
Quadrat der Dreiecksfläche: $\boxed{}$.

Aufgabe 5:
Gegeben seien die Punkte $P = (0, 3, -2)$, $Q = (3, 7, -1)$ und $R = (1, -3, -1)$, die Gerade g_1 durch P und Q und die Gerade g_2 durch R mit dem Richtungsvektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P von der Geraden g_2, sowie den Abstand der Geraden g_1 von der Geraden g_2.
Antwort:
Abstand von P zu g_2: $\boxed{}$.
Abstand von g_1 zu g_2: $\boxed{}$.

Aufgabe 6:
Gegeben sei die Ebene

$$E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

a) Bestimmen Sie die Gleichungsdarstellung der zu E parallelen Ebene F durch den Punkt $A = (-4, 2, 2)$.

b) Welcher Punkt B der Ebene E besitzt den kleinsten Abstand zum Punkt A und wie groß ist dieser Abstand?

c) Zeigen Sie, dass der Punkt $C = (-3, 0, 4)$ in der Ebene F liegt und die Punkte A, B, C ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Bestimmen Sie die Längen der Seiten, alle Innenwinkel und die Fläche des Dreiecks.

Antwort:

a) F: $2x + \boxed{}y + \boxed{}z = \boxed{}$.

b) $B = \left(\boxed{}, \boxed{}, \boxed{}\right)$, Abstand: $\boxed{}$.

c) $|\overrightarrow{AB}|^2 = \boxed{}$, $|\overrightarrow{BC}|^2 = \boxed{}$, $|\overrightarrow{CA}|^2 = \boxed{}$.
$\sphericalangle(ABC) = \pi/\boxed{}$, $\sphericalangle(BCA) = \pi/\boxed{}$, $\sphericalangle(CAB) = \pi/\boxed{}$.
Dreiecksfläche: $\boxed{} / \boxed{}$ (Angabe als vollständig gekürzter Bruch).

Aufgabe 7:
Gegeben sei die Gerade

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und der Punkt $P = (2, -1, 1)$.

a) Berechnen Sie den Abstand des Punktes P von der Geraden g.

b) Ermitteln Sie die Gleichungsdarstellung der Ebene E, die durch die Punkte $A = (0, 1, 1)$, $B = (1, 2, 2)$ und $C = (1, 0, 1)$ aufgespannt wird.

c) Sei F die durch die Gerade g und den Punkt P aufgespannte Ebene. Unter welchem Winkel schneiden sich die Ebenen E und F?

d) Berechnen Sie das Volumen des von A, B, C und $D = (-3, 0, 1)$ aufgespannten Spats.

Antwort:

a) Quadrierter Abstand: $\boxed{}$.

b) E: $x + \boxed{}\, y + \boxed{}\, z = \boxed{}$.

c) Schnittwinkel: $\pi / \boxed{}$.

d) Volumen: $\boxed{}$.

Anhang A

Downloads

Zu einigen Themen, die in diesem Kurs behandelt werden, stehen in der Online-Version Downloads zur Verfügung. Diese sind nachfolgend aufgelistet.

- Abschnitt 2.2.2:

  MATLAB-Programm zur Visualisierung der Koch Schneeflocke (Dateityp .m)

- Abschnitt 2.5.10:

  MATLAB-Programm zum Newton-Verfahren (Dateityp .m)

- Abschnitt 3.2.7:

  MATLAB Programm zum Rückwärts-Einsetzen (Dateityp .m)

http://www.mathematik-online.org/