Höhere Mathematik I–II **Diplomvorprüfung** **4. 9. 2007**

2. Klausur

für Studierende der Fachrichtungen
el, geod,kyb

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 10 handbeschriebene DIN A4 Blätter.
- Bei den **Aufgaben 1–5** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate Blätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die folgenden Angaben könnten hilfreich sein:

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

$$\boxed{\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

Potenzreihen:

$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$	$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}$
$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbb{R}$	$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}, \quad -1 < x \leq 1$

- In dieser Klausur können bis zu **50 Punkte** erreicht werden.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab Mitte Oktober im NWZ II, Pfaffenwaldring 57, 8. Stock, durch Aushang bekannt gegeben (Ankündigung auf der Hompage zu HM 2).

  Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Soweit mündliche Nachprüfungen erforderlich sein sollten, werden die nötigen Informationen zusammen mit den Prüfungsergebnissen bekannt gegeben. Eine individuelle Benachrichtigung der betreffenden Kandidatinnen und Kandidaten erfolgt nicht. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren.

Mit Ihrer Teilnahme an der Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (8 Punkte):
Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x(1+x^2)} \quad (x \neq 0)$.

a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f.

b) Berechnen Sie (mit partieller Integration) $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{x^2}\, dx$.

c) Untersuchen Sie, ob die folgenden Integrale existieren:

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{x^2} dx$, (2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^2} dx$

Aufgabe 2 (9 Punkte):
Die Matrix B sei gegeben durch

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte von B.

b) Berechnen Sie alle Eigenvektoren und Hauptvektoren von B.

c) Geben Sie die Jordan-Normalform von B an.

Aufgabe 3 (9 Punkte):

a) **i)** Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Kurven

$$\mathrm{Re}\left(\frac{5}{4} - z\right) = \left|z - \frac{3}{4}\right| \quad \text{und} \quad |z+2| = \sqrt{5}$$

und skizzieren Sie die beiden Kurven in der komplexen Zahlenebene.

ii) Kennzeichnen Sie in der Skizze aus $\mathbf{a_1}$) die Menge aller Punkte $z \in \mathbb{C}$, die gleichzeitig die Bedingungen

$$\mathrm{Re}\left(\frac{5}{4} - z\right) \geq \left|z - \frac{3}{4}\right| \quad \text{und} \quad |z+2| \leq \sqrt{5}$$

erfüllen.

b) Geben Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^2 = 2 + 2\sqrt{3}\, i$$

in der Polardarstellung $z = r\, \mathrm{e}^{i\varphi}$ und in der Form $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ an.

Aufgabe 4 (8 Punkte):

Gegeben sei die Gerade $g : \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} := x_0 + su$ $(s \in \mathbb{R})$ und der Punkt P mit dem Ortsvektor $p = \begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}$.

a) Stellen Sie den Vektor $v = p - x_0$ als Summe eines zu u parallelen und eines zu u senkrechten Vektors dar.

Berechnen Sie den Abstand des Punktes P von der Geraden g.

b) Der Punkt P und die Gerade g liegen in einer Ebene E_1. Stellen Sie eine Koordinatengleichung von E_1 auf.

Die Ebene E_2 ist gegeben durch $2x_1 + 2x_2 + x_3 - 4 = 0$.

Der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstand zu E_1 doppelt so groß ist wie ihr Abstand zu E_2, besteht aus zwei Ebenen E_3 und E_4. Geben Sie die Gleichungen dieser beiden Ebenen an.

Aufgabe 5 (7 Punkte):
Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y) = y - 5\arctan(y) + x^2 - 2x + 1.$$

a) Ermitteln Sie die Tangentialebene an f im Punkt $(0, 0, 1)$.

b) Geben Sie für f das Taylorpolynom der Ordnung 2 um den Punkt $(0, 0)$ an.

Bitte beachten Sie auch die Aufgaben auf der Rückseite!

Name: | | **Matrikel–Nr.:** | |

Hinweise:

- Tragen Sie Name und Matrikelnummer in die oben vorgesehenen Kästchen ein und geben Sie dieses Blatt zusammen mit Ihren anderen Ausarbeitungen ab.
- Auf dieser Seite genügt es, die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen einzutragen. Die Angabe eines Lösungsweges oder einer Begründung wird nicht verlangt.

Aufgabe 6 (9 Punkte):
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n+1}-\sqrt{n^2-4n+1}) = \boxed{}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n} = \boxed{}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2(2x)} = \boxed{}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = \boxed{}$