1. Klausur

für Studierende der Fachrichtungen
el, kyb

Bitte unbedingt beachten:

- In dieser Klausur können bis zu **44 Punkte** erreicht werden.

Aufgabe 1 (7 Punkte):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - e^t. \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^t \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von A ist $P(\lambda) = \lambda^2 - 1$, also hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$, jeweils mit der Multiplizität 1.

Die Lösung des homogenen DGLS schreibt sich dann $x_h(t) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} e^{-t}$.

Durch Einsetzen von $x_h(t)$ im homogenen DGLS erhält man nach Koeffizientenvergleich $a_1 = a_2$ und $b_1 = -b_2$, also ist die homogene Lösung

$$x_h(t) = a \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Daraus ergibt sich die Wronskimatrix $X(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix}$, deren Determinante $W(t) = -2 \neq 0$ ist.

Für die Speziallösung des inhomogenen DGLS macht man den Ansatz $x_s(t) = X(t)c(t)$, wobei $c(t) = \int\limits_0^t X^{-1}(s)\beta(s)ds$.

Zur Bestimmung von $c(t)$ berechnet man zunächst $X^{-1}(t) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^t & e^t \end{pmatrix}$.

Damit findet man $c(t) = \begin{pmatrix} -\frac{t}{2} \\ \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ und somit die Speziallösung

$$x_s(t) = \begin{pmatrix} -\frac{t}{2}e^t + \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} \\ -\frac{t}{2}e^t - \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Zusammen mit der homogenen Lösung ergibt das die allgemeine Lösung des DGLS

$$x(t) = x_h(t) + x_s(t) = \begin{pmatrix} \left(a - \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\right) e^t + \left(b - \frac{1}{4}\right) e^{-t} \\ \left(a - \frac{t}{2} - \frac{1}{4}\right) e^t - \left(b - \frac{1}{4}\right) e^{-t} \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2 (6 Punkte):

$$\begin{aligned} \ddot{u}(x) &= \frac{1}{4(\dot{u}(x))^3}, \quad x \in (0,1) \\ \dot{u}(0) &= 0 \\ u(1) &= 0. \end{aligned}$$

Lösung:

Substitution $y(x) = \dot{u}(x)$

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{4y^3(x)} \\ y(0) &= 0. \end{aligned}$$

Trennung der Variablen:

$$g(x) = 1 \implies G(x) = \int_0^x d\zeta = x$$

$$h(y) = 4y^3 \implies H(y) = \int_0^y 4\zeta^3 d\zeta = y^4.$$

$H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \qquad H^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\,, \qquad H^{-1}(x) = \pm\sqrt[4]{x}.$

$\implies y(x) = H^{-1}(G(x) + H(0)) = \pm\sqrt[4]{x}.$

$$\begin{aligned} \implies \dot{u}(x) = \pm\sqrt[4]{x} \implies u(x) &= \pm\left(C + \int_0^x \zeta^{\frac{1}{4}} d\zeta\right) \\ &= \pm\left(C + x^{\frac{5}{4}} \cdot \frac{4}{5}\right). \end{aligned}$$

$$0 = u(1) = \pm\left(C + \frac{4}{5}\right) \implies C = \pm\frac{4}{5}.$$

$$\implies u(x) = \mp\frac{4}{5} \pm \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}, \quad u : (0,1) \to \mathbb{R}\,.$$

Aufgabe 3 (7 Punkte): Wegen $f(\infty) \neq 0$ kann man den Ansatz

$$f(z) = \frac{z+b}{cz+d}$$

machen. Es gilt

$$f(0) = 3,\ f(1) = \frac{4}{3},\ f(i) = 1-i.$$

Daraus folgt

$$\begin{array}{l} 3 = \frac{b}{d}, \quad \frac{4}{3} = \frac{1+b}{c+d}, \quad 1-i = \frac{i+b}{ci+d} \\ 4c+4d = 3+3b, \quad 3d = b, \quad (1-i)(ci+d) = i+b \end{array}$$

Einsetzen der 2. Gleichung in die 1. und 3. Gleichung liefert

$$\left.\begin{array}{r} 4c-5d = 3 \\ (1+i)c-(2+i)d = i \end{array}\right| \begin{array}{c} \cdot(1+i) \\ \cdot(-4) \end{array}.$$

Addition liefert nun

$$(-5i-5+8+4i) = 3+3i-4i \iff (3-i)d = 3-i \iff d = 1.$$

Einsetzen liefert

$$3d = b \Longrightarrow b = 3$$

und

$$4c+4d = 3+3b \Longrightarrow 4c+4 = 3+9 = 12 \Longrightarrow c = 2.$$

Damit ist

$$f(z) = \frac{z+3}{2z+1}.$$

Aufgabe 4 (8 Punkte): 1. Lösungsweg:
Der Rand kann in 4 Teile C_1, C_2, C_3, C_4 zerlegt werden, diese werden durch

$$\begin{array}{rcl} C_1(t) = (1, -1+t)^T & : & t \in [0,2] \\ C_2(t) = (1-(t-2), 1)^T & : & t \in [2,4] \\ C_3(t) = (-1, 1-(t-4))^T & : & t \in [4,6] \\ C_4(t) = (-1+(t-6), -1)^T & : & t \in [6,8] \end{array}$$

aufeinanderfolgend parametrisiert.
Anmerkung: Die Parametrisierung

$$\begin{array}{rcl} C_1(t) = (1-2t, 1)^T & : & t \in [0,1] \\ C_2(t) = (-1, 1-2t)^T & : & t \in [0,1] \\ C_3(t) = (-1+2t, -1)^T & : & t \in [0,1] \\ C_4(t) = (1, -1+2t)^T & : & t \in [0,1] \end{array}$$

ist auch O.K.
Es gilt

$$\oint_C \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \sum_i \int_{C_i} \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Die Tangentialvektoren an die Parametrisierungen sind gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ an } C_1, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ an } C_2, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ an } C_3, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ an } C_4$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} f(x(s))\,ds &= \int_0^2 \frac{1}{1+(t-1)^2}\,dt \\
&= \int_{-1}^1 \frac{1}{1+s^2}\,ds = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} - \frac{-\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Ebenso sind

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} f(x(s))\,ds &= \int_2^4 \frac{1}{1+(1-(t-2))^2}\,dt \\
&= \int_{-1}^1 \frac{1}{1+s^2}\,ds = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} - \frac{-\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \\
\int_{C_3} f(x(s))\,ds &= \int_4^6 \frac{1}{1+(1-(t-4))^2}\,dt \\
&= \int_{-1}^1 \frac{1}{1+s^2}\,ds = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} - \frac{-\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \\
\int_{C_4} f(x(s))\,ds &= \int_6^8 \frac{1}{1+(-1+(t-6))^2}\,dt \\
&= \int_{-1}^1 \frac{1}{1+s^2}\,ds = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} - \frac{-\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Daher ist

$$\oint_C \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = 4\frac{\pi}{2} = 2\pi.$$

2.Lösungsweg
Da $\nabla \times f(x) = 0$ für $x \neq 0$ kann der Verlauf des Weges geändert werden, solange die Kurve einmal um den Nullpunkt läuft. Das heißt

$$\oint_C \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \oint_K \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

wobei

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$$

der Einheitskreis ist. Er wird durch

$$s : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad s(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

parametrisiert. Für den Tangentialvektor im Punkt θ gilt

$$t(\theta) = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$
\begin{aligned}
\oint_K \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} &= \int_0^{2\pi} f(\theta)\cdot t(\theta)\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)\right]\, d\theta = 2\pi.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5 (9 Punkte):

$$f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,,\ f(x,y)=e^x\cos\ y+e^y\sin\ x$$

(i) f ist harmonisch:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^x\cos\ y - e^y\sin\ x - e^x\cos\ y + e^y\sin\ x = 0\,.$$

(ii) Da f stetig differenzierbar und harmonisch ist, ist es der Realteil einer holomorphen Funktion.

(iii) Finde $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,, so dass $F(z)=f(x,y)+ig(x,y)$ holomorph ist.

Cauchy-Riemannsche Gleichungen:

$$(*)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\,,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\qquad (**)$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow}\quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=e^x\cos\ y+e^y\cos\ x \Longrightarrow g(x,y)=e^x\sin\ y+e^y\cos\ x+C(x).$$

$$
\begin{aligned}
\overset{(**)}{\Longrightarrow}\quad & -e^x\sin\ y+e^y\sin\ x = -e^x\sin\ y+e^y\sin\ x - C'(x) \\
\Longrightarrow\quad & C'(x)=0 \quad \Longrightarrow C(x)=K \quad \text{(Konstante)} \\
\Longrightarrow\quad & g(x,y)=e^x\sin\ y+e^y\cos\ x+K.
\end{aligned}
$$

Anmerkung: Es ist nicht notwendig K hinzuschreiben. Speziallfälle, wie z.B. $K=0$, reichen auch.

(iv)

$$
\begin{aligned}
F(z) &= e^x\cos\ y+e^y\sin\ x+i(e^x\sin\ y+e^y\cos\ x)+iK \\
&= e^x(\cos\ y+i\sin\ y)+e^y(\sin\ x+i\cos\ x)+iK \\
&= e^x\cdot e^{iy}+ie^y(\cos\ x-i\sin\ x)+iK \\
&= e^z+ie^y\cdot e^{-ix}+iK \\
&= e^z+ie^{-zi}+iK.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6 (7 Punkte): Berechnen Sie das Oberflächenintegral der Funktion

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3z \\ 5y \\ 2 \end{pmatrix}$$

auf der Oberfläche einer Kugel

$$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\right\}$$

mit dem Radius $r > 0$.
Wir benutzen folgende Parametrisierung einer Kugel:

$$\omega(\varphi,\psi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\psi \\ r\sin\varphi\cos\psi \\ r\sin\psi \end{pmatrix}, \quad \psi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ \varphi \in [-\pi,\pi].$$

also gilt

$$\omega_\varphi(\varphi,\psi) = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi\cos\psi \\ r\cos\varphi\cos\psi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\omega_\psi(\varphi,\psi) = \begin{pmatrix} -r\cos\varphi\sin\psi \\ -r\sin\varphi\sin\psi \\ r\cos\psi \end{pmatrix}.$$

und damit auch

$$\begin{aligned}
(\omega_\varphi \times \omega_\psi)(\varphi,\psi) &= \begin{pmatrix} \omega_{\varphi,2}\omega_{\psi,3} - \omega_{\varphi,3}\omega_{\psi,2} \\ \omega_{\varphi,3}\omega_{\psi,1} - \omega_{\varphi,1}\omega_{\psi,3} \\ \omega_{\varphi,1}\omega_{\psi,2} - \omega_{\varphi,2}\omega_{\psi,1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\psi r\cos\psi \\ -(-r)\sin\varphi\cos\psi \cdot r\cos\psi \\ -r\sin\varphi\cos\psi \cdot (-r)\sin\varphi\sin\psi - r\cos\varphi\cos\psi \cdot (-r)\cos\varphi\sin\psi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} r^2\cos\varphi\cos^2\psi \\ r^2\sin\varphi\cos^2\psi \\ r^2\cos\psi\sin\psi \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Mit $F = \begin{pmatrix} 3z \\ 5y \\ 2 \end{pmatrix}$ und $r > 0$ folgt

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(\omega(\varphi,\psi))\cdot(\omega_\varphi\times\omega_\psi)(\varphi,\psi)\,d\psi\,d\varphi\\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\begin{pmatrix}3r\sin\psi\\ 5r\sin\varphi\cos\psi\\ 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r^2\cos\varphi\cos^2\psi\\ r^2\sin\varphi\cos^2\psi\\ r^2\cos\psi\sin\psi\end{pmatrix}d\psi\,d\varphi\\
&= r^2\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3r\sin\psi\cos^2\psi\cos\varphi+5r\sin^2\varphi\cos^3\psi+2\cos\psi\sin\psi\,d\psi\,d\varphi\\
&= r^2\int_{-\pi}^{\pi}\left[-r\cos\varphi\cos^3\psi+5r\sin^2\varphi(\sin\psi-\frac{1}{3}\sin^3\psi)+\sin^2\psi\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\\
&= r^2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{20}{3}r\sin^2\varphi\,d\varphi\\
&= \frac{20}{3}r^3\left[\frac{1}{2}\varphi-\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right]_{-\pi}^{\pi}\\
&= \frac{20}{3}\pi r^3.
\end{aligned}
$$

2. Lösungsweg Die Aufgabe läßst sich auch mit dem Satz von Gauß lösen. Es gilt also

$$\int_{\partial K} F\cdot n\,dS=\int_K \mathrm{div}F\,dx\,dy\,dz.$$

Es gilt

$$\mathrm{div}F=5.$$

Also folgt

$$\int_{\partial K} F\cdot n\,dS=\int_K 5\,dx\,dy\,dz=5\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{20}{3}\pi r^3.$$