Höhere Mathematik I–II Diplomvorprüfung 3. 3. 2008

1. Klausur

für Studierende der Fachrichtungen
el, geod, kyb

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 10 handbeschriebene DIN A4 Blätter.
- Bei den **Aufgaben 1–5** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate Blätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die folgenden Angaben könnten hilfreich sein:

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

$$\boxed{\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

Potenzreihen:

$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$	$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}$
$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbb{R}$	$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \quad -1 \le x < 1$

- In dieser Klausur können bis zu **54 Punkte** erreicht werden.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab Mitte April im NWZ II, Pfaffenwaldring 57, 8. Stock, neben Raum 8.556 durch Aushang bekannt gegeben (Ankündigung auf der alten Homepage zu HM 2).

  Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Soweit mündliche Nachprüfungen erforderlich sein sollten, werden die nötigen Informationen zusammen mit den Prüfungsergebnissen bekannt gegeben. Eine individuelle Benachrichtigung der betreffenden Kandidatinnen und Kandidaten erfolgt nicht. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren.

Mit Ihrer Teilnahme an der Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (8 Punkte):
Gegeben ist die rekursiv definierte Folge (u_n) durch

$$u_0 = 2, \quad u_n = 5 - \frac{4}{u_{n-1}} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion: $1 < u_n < 4$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$.

b) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion: die Folge (u_n) ist streng monoton wachsend.

c) Begründen Sie, dass die Folge konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert der Folge.

Aufgabe 2 (8 Punkte): Bestimmen Sie

a) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ mit Hilfe der Substitution $u = \sqrt{x}$,

b) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+x)}$.

Aufgabe 3 (11 Punkte): Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3+\alpha & 1-\alpha & 0 \\ 1-\alpha & 3+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

a) Bestimmen Sie zum Eigenwert $\lambda = 4$ zwei Eigenvektoren $\vec{f}_1$ und $\vec{f}_2$ der Matrix A mit $\vec{f}_1 \perp \vec{f}_2$.

b) Geben Sie einen von $\vec{f}_1$ und $\vec{f}_2$ linear unabhängigen Eigenvektor $\vec{f}_3$ von A und den zugehörigen Eigenwert an.

c) Geben Sie eine Orthogonalmatrix S und eine Diagonalmatrix D an, so dass $S^T A S = D$ gilt.

d) Gegeben sei eine Schar von Quadriken durch

$$Q_\alpha : \quad (3+\alpha)x_1^2 + (3+\alpha)x_2^2 + (2-2\alpha)x_1x_2 + 4x_3^2 = 1\,.$$

i) Bestimmen Sie die euklidische Normalform dieser Quadriken.
ii) Für welches α ist Q_α eine Kugel?
iii) Was für eine Quadrik ist Q_{-1}?

e) Wie lautet die Gleichung der Ebene $x_1 = 1$ nach der Koordinatentransformation
$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$?

Aufgabe 4 (10 Punkte): Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = (1 - x^2)\, e^{-x^2}$.

a) Untersuchen Sie die Funktion f auf Symmetrie, Nullstellen und Extremstellen.

b) Bestimmen Sie das Verhalten der Funktion f für $|x| \to \infty$ und skizzieren Sie den Graphen von f.

c) Entwickeln Sie die Funktion f in eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Aufgabe 5 (8 Punkte): Bestimmen Sie das Minimum der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto 4\,x^2 + z$$

auf der Schnittkurve des parabolischen Zylinders $\mathcal{Z} : x + y^2 = 0$ und der Ebene $\mathcal{E} : 2y - z = 1$.

Bitte beachten Sie auch die Aufgabe auf der Rückseite!

Name: $\boxed{}$ **Matrikel–Nr.:** $\boxed{}$

Hinweise:

- Tragen Sie Name und Matrikelnummer in die oben vorgesehenen Kästchen ein und geben Sie dieses Blatt zusammen mit Ihren anderen Ausarbeitungen ab.
- Auf dieser Seite genügt es, die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen einzutragen. Der Lösungsweg wird nicht verlangt und nicht gewertet.

Aufgabe 6 (9 Punkte): Gegeben sei das von den reellen Parametern t und c abhängige lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & + & 3\,t\,x_2 & & & = & c \\ & & 2\,x_2 & + & (2-t)\,x_3 & = & 2 \\ -x_1 & + & (2-t)\,x_2 & - & t\,x_3 & = & 1 \end{array}\right\} (\star)$$

a) Geben Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix A von $(\star)$ in Abhängigkeit von t an.

$$\det(A) = \boxed{}$$

b) $(\star)$ besitzt für $t \neq \boxed{}$ genau eine Lösung.

c) $(\star)$ besitzt für $t = \boxed{}$ und $c = \boxed{}$ unendlich viele Lösungen.

Diese sind gegeben durch:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boxed{}.$$