

Gegeben sei die Geradenschar

$$g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} a+1 \\ a \\ -2+5a \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 3+2a \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \text{ sowie die Gerade } h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\mu \in \mathbb{R}).$$

mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}$.

- a) Zeigen Sie, dass die Geraden g_0 und g_1 in einer Ebene E liegen und geben Sie die Gleichung von E in Koordinatendarstellung an.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = 0, \mu = -1$$

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, E : (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_E = 0 \Rightarrow -2x_1 - 3x_2 + x_3 = -4$$

Weisen Sie nach, dass alle Geraden g_a für $a \in \mathbb{R}$ in der Ebene E liegen.

$$-2a - 2 - 3a - 2 + 5a + \lambda(-2a - 3 + 3 + 2a) = -4$$

- b) Zeigen Sie, dass h parallel zu E ist und berechnen Sie den Abstand von h zu E .

$$\vec{n}_E \cdot (-1, 1, 1)^T = 0, (2, 1, -4) \notin E. d(h, E) = \left| \frac{-2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-4) + 4}{\sqrt{14}} \right| = \frac{7}{\sqrt{14}}$$

- c) Untersuchen Sie in Abhängigkeit von a , ob die Geraden h und g_a parallel oder windschief sind.

$$(-1, 1, 1)^T \parallel (a, 1, 3 + 2a)^T? \text{ Nur für } a = -1 \text{ ist } g_a \parallel h.$$

- d) Berechnen Sie in Abhängigkeit von a den Abstand von h zu g_a .

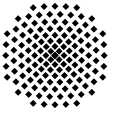
Für $a \neq -1$ ist $d(h, g_a) = d(h, E) = \frac{7}{\sqrt{14}}$, da die beiden (windschiefen) Geraden immer ein gemeinsames Lot $\parallel \vec{n}_E$ besitzen.

Für $a = -1$ muss der Abstand der beiden parallelen Geraden h und g_{-1} berechnet werden. Dazu benötigen wir ein gemeinsames Lot: Mit dem Aufpunkt von $g_{-1} : (0, -1, -7)$ ergibt sich

$$\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 3 + 3\mu = 0 \Rightarrow \vec{v}_{\text{Lot}} = (3, 1, 2)^T \text{ und } d(h, g_{-1}) = \sqrt{14}$$

Gesamt: 11 P



Für fest gewählten Parameter $a > 0$ sei die Funktion f_a definiert durch

$$f_a(t) := \sqrt{\frac{1}{a^2} - t} \quad \left(t \leq \frac{1}{a^2} \right).$$

- a) Berechnen Sie für f_a das eindimensionale Taylorpolynom der Ordnung 2 um den Punkt $t = 0$ in Abhängigkeit des Parameters a .

Die ersten zwei Ableitungen von f_a sind

$$f'_a(t) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} - t \right)^{-1/2} \quad \text{und} \quad f''_a(t) = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{a^2} - t \right)^{-3/2}.$$

Damit folgt für das gesuchte Taylorpolynom der Ordnung 2

$$T_2(t) = f_a(0) + f'_a(0) \cdot t + \frac{1}{2} f''_a(0) \cdot t^2 = \frac{1}{a} - \frac{1}{2} a t - \frac{1}{8} a^3 t^2.$$

- b) Bestimmen Sie mit Hilfe von a) für die Funktion

$$g(x, y) = f_2(y) \cdot \frac{1 + f_1(x)}{x} \quad \left(x \leq 1, y \leq \frac{1}{4} \right)$$

das zweidimensionale Taylorpolynom der Ordnung 1 an der Stelle $(x, y) = (0, 0)$.

Mit a) folgt für die ersten Glieder der eindimensionalen Taylorpolynome von f_1 und f_2 um $x = 0$ bzw. $y = 0$

$$T^{f_1}(x) = 1 - \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} x^2 \quad \text{und} \quad T^{f_2}(y) = \frac{1}{2} - y \quad \left(\text{bzw. } \frac{1}{2} - y - y^2 \right).$$

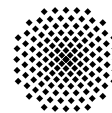
Damit ergibt sich für die ersten Glieder des Taylorpolynoms von g um $(0, 0)$

$$\begin{aligned} T^g(x, y) &= T^{f_2}(y) \cdot \frac{1 + T^{f_1}(x)}{x} = \left(\frac{1}{2} - y \right) \cdot \frac{1 - (1 - \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} x^2)}{x} \\ &= \left(\frac{1}{2} - y \right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} x \right) \end{aligned}$$

Das gesuchte zweidimensionale Taylorpolynom der Ordnung 1 ist also

$$T_1(x, y) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} x - \frac{1}{2} y.$$

Gesamt: 8 P



a) B ist obere Dreiecksmatrix \implies Eigenwerte sind die Diagonaleinträge $1, 1, -1, 0$.

b) • Eigenvektor zum Eigenwert 0 :

$$v_1 := (0 \ 0 \ 0 \ 1)^T$$

• Eigenvektor zum Eigenwert -1 :

$$B + E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• Eigenvektoren zum Eigenwert 1 :

$$B - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass zum doppelten Eigenwert 1 nur einen Eigenvektor, nämlich

$$v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

existiert. Es ist also noch ein Hauptvektor zu berechnen.

• Hauptvektor v_4 zum Eigenwert 1 und Eigenvektor v_3 :

$$(B - E)v_4 = v_3 \iff \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 0 & -1 & 4 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & -1 & 4 \end{array} \right),$$

d.h. zum Beispiel

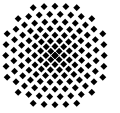
$$v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(v_4 nur eindeutig bis auf die homogene Lösung, also Vielfache von v_3).

c) Aus a) und b) folgt: Die Jordan-Normalform von B ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gesamt: 9 P



- a) Da $1 + i$ Nullstelle des reellen Polynoms p ist, ist auch $1 - i$ Nullstelle. Somit kann man p durch $(z - 1 - i)(z - 1 + i) = z^2 - 2z + 2$ teilen.

Polynomdivision ergibt $p(z) = (z^2 - 2z + 2)(z^2 - 5z + 6)$.

Mit Hilfe der Mitternachtsformel berechnet man als Nullstellen von $z^2 - 5z + 6$ die Werte 2 und 3 und erhält

- i) die reelle irreduzible Zerlegung

$$p(z) = (z^2 - 2z + 2)(z - 2)(z - 3),$$

- ii) die komplexe irreduzible Zerlegung

$$p(z) = (z - 1 - i)(z - 1 + i)(z - 2)(z - 3).$$

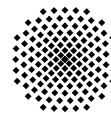
- b)

$$\frac{2+i}{1-2i} = \frac{(2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{2+i+4i-2}{1+4} = i$$
$$z = i^3 \cdot (1+i) = -i(1+i) = -i+1$$

- i) $z = 1 - i$.

- ii) $z = \sqrt{2}e^{\frac{7}{4}\pi i}$. ($r = |1 - i| = \sqrt{2}$, $\tan \varphi = \frac{y}{x} = -1 \Rightarrow \varphi = \frac{3}{4}\pi + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$)

Gesamt: 10 P



Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

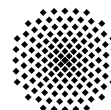
a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2(n+1) - \sqrt{4n^2 + n - 2}) = \boxed{\frac{7}{4}}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\frac{(3n+1)(n-1)}{(3n-1)(n+1)} - 1 \right) = \boxed{-\frac{4}{3}}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{2}{x}} = \boxed{e^6}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x)}{1 - \cos(x)} = \boxed{2}$

Gesamt: 8 P



a) Welche der folgenden Reihen sind konvergent?

Antworten Sie nur mit 'j' für 'ja' bzw. 'n' für 'nein'. Beachten Sie, dass in dieser Teilaufgabe für falsche Antworten negative Punkte vergeben werden.

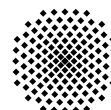
$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$
j	j	n	j

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Reihen?

Geben Sie den **maximalen** Konvergenzbereich an.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+x)^n}{n2^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(4 + \sqrt{n})^n}$
$-3 \leq x < 1$	$x \in \mathbb{R}$

Gesamt: 8 P



a) Welche der folgenden Reihen sind konvergent?

Antworten Sie nur mit 'j' für 'ja' bzw. 'n' für 'nein'. Beachten Sie, dass in dieser Teilaufgabe für falsche Antworten negative Punkte vergeben werden.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$
j	j	n	j

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Reihen?

Geben Sie den **maximalen** Konvergenzbereich an.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+x)^n}{n2^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(4 + \sqrt{n})^n}$
$-3 \leq x < 1$	$x \in \mathbb{R}$

Gesamt: 8 P