

Statistik II für Wirtschaftswissenschaftler

Klausur am 02.08.2007, 09.00–11.00.

Bitte unbedingt beachten:

- a) Gewertet werden alle 8 gestellten Aufgaben.
- b) Lösungswege sind anzugeben. Die Angabe des Endergebnisses allein gilt nicht als Lösung. Da *keine* Taschenrechner zugelassen sind, brauchen Zahlenrechnungen, für die man normalerweise einen Taschenrechner benutzen würde, nicht durchgeführt zu werden. Ausnahme: Zwischenergebnis, für das der Zahlenwert für die weitere Behandlung der Aufgabe unbedingt nötig ist. Dieser Zahlenwert kann aber dann durch Kopfrechnung ermittelt werden. Ein Endergebnis ist vollständig, wenn zur Ermittlung des Zahlenwertes höchstens die Ausführung der elementaren Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) und die Anwendung elementarer Funktionen ($\exp x (\equiv e^x)$, $\ln x$, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, a^x , \sqrt{x}) nötig wäre. Die Bildung von $m!$ und des Binomialkoeffizienten z.B. gehören *nicht* zu den elementaren Rechenoperationen.
- c) Zugelassene Hilfsmittel:
10 Seiten DIN A4 mit Sätzen, Definitionen und Formeln (einschließlich begleitender Text dazu), **aber ohne Aufgaben, ohne Lösungsvorschläge von Aufgaben und auch ohne Beispiele**,
Fremdsprachenwörterbücher (ohne zusätzliche Einträge),
Tabelle der Standardnormalverteilung ohne zusätzliche Einträge ,
Tabelle der Quantile der χ^2 -Verteilung ohne zusätzliche Einträge ,
Tabelle der Quantile der t -Verteilung ohne zusätzliche Einträge.

Weitere Hinweise:

- a) Wer mindestens 30 Punkte erreicht hat, hat bestanden.
- b) Weitere Infos finden Sie im Internet in dem file “allinfo.pdf” im Verzeichnis
“http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/WiS_Kolbe_SS07/”.

Aufgabe 1

10 Punkte

- a) Es sei Y eine diskrete Zufallsvariable, die den Wert (-4) mit der Wahrscheinlichkeit 0.1 , den Wert 1 mit der Wahrscheinlichkeit 0.4 und den Wert 2 mit der Wahrscheinlichkeit 0.5 annimmt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(|Y - E(Y)| < 2 \sigma(Y))$.

Benötigtes Rechenergebnis: $\sqrt{3.0} = 1.7$

- b) Bestimmen Sie die positive Konstante c so, dass

$$f(x) := \begin{cases} c \cdot x \cdot \ln x & \text{für } 1 \leq x \leq e, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

die Wahrscheinlichkeitsdichte einer stetigen Zufallsvariablen X ist, und bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X .

Hinweis: Hilfsformel zur Bestimmung der Integrale:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{((k+1) \ln x - 1) x^{k+1}}{(k+1)^2} \right) = x^k \cdot \ln x, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 2

11 Punkte

- a) Die (in Laufleistung gemessene) Lebensdauer eines aus einer Produktion zufällig herausgegriffenen Autoreifens sei normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 30\,000$ (km) und Standardabweichung $\sigma = 2\,000$ (km). Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Reifen eine Lebensdauer von

a₁) höchstens $35\,000$ (km) hat.

a₂) mindestens $25\,000$ (km) hat.

- b) Bei einem zentral gelegenen Großbetrieb mit $100\,000$ Mitarbeitern kommen $20\,000$ mit dem Auto und $80\,000$ mit öffentlichen Verkehrsmitteln zur Arbeit. Es werden zufällig 100 Mitarbeiter ausgewählt und befragt, wobei kein Mitarbeiter mehr als einmal ausgewählt wird. Bestimmen Sie näherungsweise (also nicht exakt) die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 16 Mitarbeiter davon mit dem Auto kommen.

Begründen Sie, weshalb die angewandte(n) Näherung(en) gerechtfertigt ist (sind).

Hinweis: Verwenden Sie zur Vereinfachung der Zahlenrechnung die Rechenergebnisse: $80.5/4 = 20.13$ und $4.5/4 = 1.13$

– bitte wenden –

Aufgabe 3

6 Punkte

Die gemeinsame Verteilung zweier ZV X und Y und die Randverteilung sei in der folgenden Tabelle teilweise vorgegeben:

$\downarrow X Y \rightarrow$	-1	0	2	
-2	*	0.05	0.15	0.30
0	*	*	0.10	*
2	0.25	*	*	*
	0.40	*	0.30	

Außerdem sei der Erwartungswert von $X - Y$ bekannt: $E(X - Y) = 0$. Bestimmen Sie die noch fehlenden Wahrscheinlichkeiten der gemeinsamen Verteilung und der Randverteilungen.

Aufgabe 4

6 Punkte

Die gemeinsame Verteilung zweier ZV X und Y sei in der folgenden Tabelle vorgegeben:

$\downarrow X Y \rightarrow$	-3	0
0	0.2	0.4
2	0.1	0.1
4	0.1	0.1

Welchen Wert hat der Korrelationskoeffizient von X und Y ?

Aufgabe 5

8 Punkte

Eine Beobachtungsgröße sei $N(\mu, \sigma)$ -verteilt, wobei μ und σ unbekannt seien. Bestimmen Sie ein 99%-Konfidenzintervall für μ in der Form $a \leq \mu \leq b$. Dazu stehen Ihnen folgende Ergebnisse der Auswertung einer Stichprobe vom Umfang $n = 25$ zur Verfügung:

$$\bar{x} = 42, \quad \sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2 = 16 \cdot 24.$$

Aufgabe 6

8 Punkte

Eine Messgröße sei $N(\mu, \sigma_0)$ -verteilt, wobei $\sigma_0 = 16$ bekannt sei. Es soll die Hypothese $H_0 : \mu \leq 70$ gegen die Hypothese $H_1 : \mu \geq 75$ getestet werden, wobei eine irrtümliche Ablehnung von H_0 nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $\alpha = 0.05$ und eine irrtümliche Ablehnung von H_1 nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $\beta = 0.10$ erfolgen soll. Zu welchem Testergebnis kommen Sie, wenn die Auswertung einer Stichprobe vom Umfang 64 einen Durchschnittswert $\bar{x} = 72$ ergibt?

Aufgabe 7

6 Punkte

Eine Lieferung von 100 000 Stück soll höchstens 5% defekte Stücke enthalten. Für die Wahrscheinlichkeit p für die Ziehung eines defekten Stückes soll also die Hypothese $H_0 : p \leq 0.05$ (etwa) gegen die Hypothese $H_1 : p \geq 0.051$ getestet werden, und zwar mit 0.10 für die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. und 2. Art. Es werden 100 zufällige Ziehungen m.Z. durchgeführt. Zu welchem Testergebnis kommen Sie, wenn zweimal ein defektes Stück gezogen wird?

Benötigte Rechenergebnisse: $0.949^{-100} = 188.$, $0.051/0.949 = 0.054$
 und $(0.051/0.949)^2 \cdot 49.5 = 0.143$.

Aufgabe 8

6 Punkte

Die ZV X kann nur die Werte 1 und 2, die ZV Y nur die Werte 1, 2, 3 und 4 annehmen. Testen Sie mit einem Signifikanzniveau von 5% die Hypothese H_0 : X und Y sind unabhängig.

Dazu steht Ihnen das Resultat einer Stichprobe vom Umfang 330 in der folgenden Tabelle von absoluten Häufigkeiten und Randhäufigkeiten zur Verfügung:

$\downarrow X Y \rightarrow$	1	2	3	4	$f_{i,*}$
1	20	25	56	69	170
2	10	30	40	80	160
$f_{*,j}$	30	55	96	149	330

Begründen Sie, weshalb die angewandte(n) Näherung(en) gerechtfertigt ist (sind).

Benötigtes Rechenergebnis:

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{(330 \cdot 20 - 170 \cdot 30)^2}{330 \cdot 170 \cdot 30} + \frac{(330 \cdot 25 - 170 \cdot 55)^2}{330 \cdot 170 \cdot 55} + \frac{(330 \cdot 56 - 170 \cdot 96)^2}{330 \cdot 170 \cdot 96} + \frac{(330 \cdot 69 - 170 \cdot 149)^2}{330 \cdot 170 \cdot 149} \\
 &+ \frac{(330 \cdot 10 - 160 \cdot 30)^2}{330 \cdot 160 \cdot 30} + \frac{(330 \cdot 30 - 160 \cdot 55)^2}{330 \cdot 160 \cdot 55} + \frac{(330 \cdot 40 - 160 \cdot 96)^2}{330 \cdot 160 \cdot 96} + \frac{(330 \cdot 80 - 160 \cdot 149)^2}{330 \cdot 160 \cdot 149} \\
 &= 6.97
 \end{aligned}$$