Aufgabe 1 8 Punkte. Man vervollständige die folgende Wahrheitstafel und entscheide, ob für Aussagen A, B und C gilt:

$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C).$$

Lösung zu 1

A	B	C	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	w
w	f	w	w	w	w	w
w	f	f	w	w	w	w
f	w	w	w	w	w	w
f	w	f	f	w	f	f
f	f	w	f	f	w	f
f	f	f	f	f	f	f

$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ $\boxed{\text{w}}$ (Auch hier "w" oder "f" eintragen.)

Aufgabe 2 10 Punkte. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{y}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha - 1 & \beta + 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Man entscheide in Abhängigkeit von den Parametern α und β, ob das Gleichungssystem lösbar ist, und berechne gegebenenfalls alle Lösungen.

Lösung zu 2 Wir bringen die erweiterte Matrix $(A, \vec{y}\,)$ auf Zeilennormalform.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha - 1 & \beta + 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - Z_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & \beta & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - \alpha Z_2]{Z_1 \to Z_1 + Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 + \alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \beta - \alpha^2 & 2 - \alpha \end{pmatrix} =: (*)$$

1. Fall: $\beta \neq \alpha^2$. Dann setzen wir zur Abkürzung $\gamma := (2 - \alpha)/(\beta - \alpha^2)$ und erhalten

$$(*) \xrightarrow{Z_3 \to (\beta - \alpha^2)^{-1} Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 + \alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 - \alpha Z_3]{Z_1 \to Z_1 - (2+\alpha) Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 - (2 + \alpha)\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 1 - \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$$

Man sieht: In diesem Falle ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar; die Lösung ist gegeben durch $x_1 = 2 - (2+\alpha)\gamma$, $x_2 = 1 - \alpha\gamma$ und $x_3 = \gamma$.

2. Fall: $\beta = \alpha^2$ und $\alpha \neq 2$. Dann ergibt sich

$$(*) \xrightarrow{Z_3 \to (2-\alpha)^{-1} Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2+\alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 - Z_3]{Z_1 \to Z_1 - 2Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Rang der erweiterten Matrix ist also größer als der von A. Folglich besitzt das lineare Gleichungssystem in diesem Fall keine Lösung.

3. Fall: $\beta = \alpha^2$ und $\alpha = 2$. Dann ist (*) bereits in Zeilennormalform gegeben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Rang der erweiterten Matrix und der Rang von A stimmen überein, das Gleichungssystem ist also lösbar. Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist

$$\vec{x}_p = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alle Lösungen des homogenen Gleichungssystem erhält man, indem man z.B. $x_3 = \lambda$ setzt:

$$\vec{x}_h = \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist folglich

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 3 6 Punkte. Man bestimme die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung zu 3 Eigenwerte von B:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 + 2Z_3]{Z_1 \to Z_1 + (1-\lambda) Z_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\lambda(1-\lambda) \\ 0 & -\lambda & 2-2\lambda \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Entwickeln nach der ersten Spalte liefert

$$\det(B - \lambda E) = -\det \begin{pmatrix} 1 & -\lambda(1-\lambda) \\ -\lambda & 2-2\lambda \end{pmatrix} = -\big(2 - 2\lambda - \lambda^2(1-\lambda)\big) = (\lambda^2 - 2)(1-\lambda).$$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \sqrt{2}$ und $\lambda_3 = -\sqrt{2}$.

Eigenraum zu $\lambda_1 = 1$, also $(B - E)\vec{x} = \vec{0}$. Mit $(*)$ wird $(B - E)$ zu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad E_1 = \text{Span}\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

Zu $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{2}$. Wenn im folgenden $\pm$ oder $\mp$ auftritt, bezieht sich das obere Zeichen stets auf λ_2 und das untere auf λ_3. Mit $(*)$ gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \mp\sqrt{2}(1 \mp \sqrt{2}\,) \\ 0 & \mp\sqrt{2} & 2 \mp 2\sqrt{2} \\ -1 & 0 & \mp\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mp\sqrt{2} + 2 \\ 0 & \mp\sqrt{2} & 2 \mp 2\sqrt{2} \\ -1 & 0 & \mp\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Die zweite Zeile ist das $(\mp\sqrt{2}\,)$-fache der ersten, sie fällt also weg. Wir können x_3 beliebig wählen und erhalten $x_2 = (\pm\sqrt{2} - 2)x_3$ und $x_1 = \mp\sqrt{2}\,x_3$. Das bedeutet

$$E_{\sqrt{2}} = \text{Span}\{\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} - 2 \\ 1 \end{pmatrix}\} \qquad \text{und} \qquad E_{-\sqrt{2}} = \text{Span}\{\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} - 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

Aufgabe 4 3+2+2 Punkte. Man bestimme die Grenzwerte

	Grenzwert
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(\sqrt{n^4+1}-n^2)}{\sqrt{n^2+n}-n}$	
$\lim\limits_{n\to\infty} n(1 - \sqrt[4]{1 - \frac{1}{n}})$	
$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} (1 + \sqrt{2})^{-k}$	

Lösung zu 4 a) $a_n = \frac{n(\sqrt{n^4+1}-n^2)}{\sqrt{n^2+n}-n} = \frac{n^3(\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}-1)}{n(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1)} = \frac{n^2(\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}-1)(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)}{1+\frac{1}{n}-1}$

$= \frac{n^2(\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}-1)(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)}{\frac{1}{n}} = \frac{n^3(1+\frac{1}{n^4}-1)(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)}{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+1} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{n(\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+1)}$

$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{n(\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+1)} = 0$

b) $a_n = n(1 - \sqrt[4]{1 - \frac{1}{n}}) = \frac{n(1-\sqrt[4]{1-\frac{1}{n}})(1+\sqrt[4]{1-\frac{1}{n}})}{(1+\sqrt[4]{1-\frac{1}{n}})} = \frac{n(1-\sqrt{1-\frac{1}{n}})}{1+\sqrt[4]{1-\frac{1}{n}}} = \frac{n(1-\sqrt{1-\frac{1}{n}})(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}})}{(1+\sqrt[4]{1-\frac{1}{n}})(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}})}$

$= \frac{n(1-1+\frac{1}{n})}{(1+\sqrt[4]{1-\frac{1}{n}})(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}})} = \frac{1}{(1+\sqrt[4]{1-\frac{1}{n}})(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}})}$

$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\sqrt[4]{1-\frac{1}{n}})(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}})} = \frac{1}{4}$, (oder Regel von L'Hospital).

c) $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (1 + \sqrt{2})^{-k} = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$. (geometrische Reihe)

Aufgabe 5   2+2+2 Punkte Man bestimme die Konvergenzradien der Potenzreihen

	Konvergenzradius
$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{2n}$	
$\sum_{n=0}^{\infty} (\sinh n) x^n$	
$\sum_{n=1}^{\infty} (n^4 - 4n^3) z^n$	

Lösung zu 5 a) Mit $a_n = 2^n$ und $z = x^2$ ergibt sich für die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$:
$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{2^n}{2^{n+1}}| = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{1}{\sqrt{2}}$
b) Mit $a_n = \sinh n$ ergibt sich: $r = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{\sinh n}{\sinh(n+1)}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{e^n - e^{-n}}{e^{n+1} - e^{-(n+1)}}|$
$= \lim_{n\to\infty} |\frac{1-e^{-2n}}{e-e^{-2n-1}}| = \frac{1}{e}$
c) $r = 1$.

Aufgabe 6   3 +3 Punkte. Man bestimme Lage und Art der Extrema von

$$f(x,y) = xy^2 \quad \text{auf der Geraden} \quad y = 1 - x$$

a) durch Verwendung der Lagrangeschen Multiplikatoren Methode;
b) ohne die Lagrangesche Multiplikatoren Methode.

Lösung zu 6 a) $F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda(x + y - 1)$ ergibt

$$\nabla F = \begin{pmatrix} y^2 + \lambda \\ 2xy + \lambda \\ x + y - 1 \end{pmatrix},$$

und $\nabla F = 0$ ergibt $\lambda = -y^2$ und $2xy - y^2 = 2(1-y)y - y^2 = y(-3y+2) = 0$, also $y_1 = 0$ ($x_1 = 1$), $y_2 = 2/3$ ($x_2 = 1/3$). Da $f \to \pm\infty$ auf $g := \{x + y - 1 = 0\}$ für $x \to \pm\infty$ ist $f(1/3, 2/3) = 4/27$ ein Maximum und $f(1,0) = 0$ ein Minimum.
Alternative: die Hessematrix von f ist $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$. Dies liefert die quadratische Form $Q = h^T H h = 4yh_1h_2 + 2xh_2^2$. Für $h \perp g$ gilt $h_1 = -h_2$ und damit ist $Q(x_1, y_1)$ positiv definit und $Q(x_2, y_2)$ negativ definit.

b) $f(x,y) = xy^2$ auf $y = x - 1$ ergibt $p(x) = x(1-x)^2$, und $p'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0$ ergibt $x_1 = 1$ ($y_1 = 0$), $x_2 = 1/3$ ($y_2 = 2/3$). (Mit $p''(x) = 6x - 4$ folgt $p''(x_1) = 2 > 0$, Minimum, und $p''(x_2) = -2$, Maximum.)

Aufgabe 7 2+3 Punkte. Man berechne die Integrale

$$\int_D (4x - y)\, d(x,y), \quad D = [0,1] \times [-1,2]$$

$$\int_D \cos(x+y)\, d(x,y), \quad D = [0,a] \times [0,b]$$

Lösung zu 7 $\int\limits_0^1 \int\limits_{-1}^2 (4x-y)\, dy\, dx = \int\limits_0^1 (4xy - \frac{y^2}{2})\Big|_{-1}^2 dx = \int\limits_0^1 (12x - \frac{3}{2})\, dx = \frac{9}{2}$.
$\int_0^a \int_0^b \cos(x+y)\ dy\ dx = \cos(a) - 1 - \cos(a+b) + \cos(b)$.

Aufgabe 8 6 Punkte. Man bestimme das Taylorpolynom 2.Ordnung von

$$f(x,y) = \sqrt{1+x+y} \quad \text{an der Stelle} \quad (0,0).$$

Lösung zu 8

$$T_2(x,y) = 1 + x/2 + y/2 - x^2/8 - xy/4 - y^2/8.$$

Aufgabe 9 6 Punkte Man löse die Anfangswertaufgabe $y' + xy = x, \quad y(0) = 1$

Lösung zu 9 TdV ergibt $\int \frac{dy}{1-y} = -\ln|1-y| = \int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C, \Rightarrow y = 1 - C\mathrm{e}^{-x^2/2}$.
AB $\Rightarrow c = 1$, also $y(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x^2/2}$.